Física 3 - EMB5043

Prof. Diego Duarte

Lei de Gauss (lista 3)

18 de agosto de 2022

1. Mostre, por meio do teorema da divergência, que a lei de Gauss pode ser escrita na forma $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Analisando o campo elétrico como um campo vetorial, o que significa extrair o divergente deste campo? Explique o comportamento campo elétrico quando $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} > 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} < 0$. Mostre também que o campo elétrico gerado por uma carga pontual estática é irrotacional.

2. A casca esférica de raio interno b e raio externo c da figura 1 está uniformemente carregada com densidade de carga volumétrica ρ e envolve uma esfera maciça e concêntrica de raio a, também carregada uniformemente com a mesma densidade de carga. Calcule o vetor campo elétrico nas quatro regiões do espaço: (a) $0 \leq r \leq a$, (b) $a \leq r \leq b$, (c) $b \leq r \leq c$, (d) $r \geq c$. Esboce o gráfico do campo elétrico em função do raio.

   Resposta: (a) $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r}$ (b) $\vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}$ (c) $\vec{E} = \left[\frac{\rho r}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}\left(b^3 - a^3\right)\right]\hat{r}$ (d) $\vec{E} = \left[\frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2}\left(c^3 - b^3 + a^3\right)\right]\hat{r}$

3. Uma distribuição de carga uniformemente simétrica tem densidade volumétrica de carga dada por $\rho(r) = \rho_0 \exp(-r/a)$ com $0 \leq r < \infty$ em que ρ_0 é uma constante e r é uma distância radial em relação à origem do sistema de coordenadas. (a) Calcule a carga total da distribuição e (b) a intensidade do campo elétrico produzido em um ponto qualquer do espaço.

   Resposta: (a) $Q = 8\pi\rho_0 a^3$ (b) $E = \frac{2\rho_0 a^3}{\epsilon_0 r^2}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{2r}{a} + 2\right]e^{-\frac{r}{a}}\right\}$

4. A camada infinita da da figura 2 tem espessura $2a$ e está carregada com densidade volumétrica de carga ρ constante. Não há cargas fora dela. Calcule o vetor campo elétrico dentro, acima e abaixo da camada.

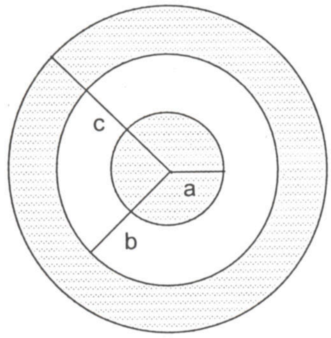

Figura 1: Exercício 2.

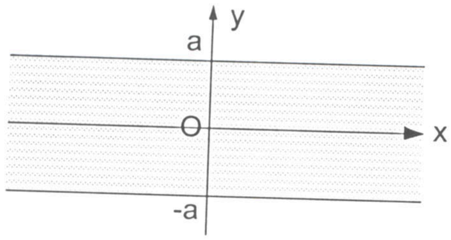

Figura 2: Exercício 4.

Resposta: Dentro: $\vec{E} = \frac{\rho y}{\epsilon_0}\hat{j}$ em relação ao ponto O. Fora: $\vec{E} = \frac{\rho a}{\epsilon_0}\hat{j}$ para $y > 0$ e $\vec{E} = -\frac{\rho a}{\epsilon_0}\hat{j}$ para $y < 0$.

5. Utilizando a lei de Gauss e o princípio da superposição, calcule a intensidade do campo elétrico produzido pelas três placas paralelas infinitas da figura 3, cujas densidades superficiais de carga são σ_1, σ_2 e σ_3, nas seguintes regiões: (a) $0 < x < a$, (b) $a < x < b$ e $b < x < \infty$.

6. Um cilindro muito longo de raio R está uniformemente carregado com densidade volumétrica de carga δ (veja a figura 4). Calcule a intensidade do campo elétrico produzido em um ponto P localizado em (a) $0 \leq \rho \leq R$ e (b) $\rho \geq R$. Esboce o gráfico $|E|$ em função da coordenada ρ.

   Resposta: (a) $E = \frac{\delta\rho}{2\epsilon_0}$ (b) $E = \frac{\delta R^2}{2\epsilon_0\rho}$

7. Uma esfera uniformemente carregada com densidade volumétrica ρ contém uma cavidade esférica em seu interior (figura 5). Mostre que o campo elétrico no interior da cavidade é uniforme e dado por $\vec{E} =$

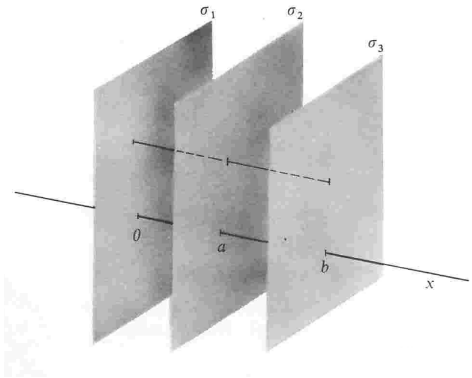

Figura 3: Exercício 5.

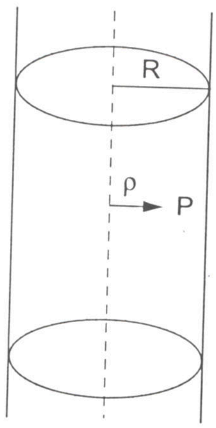

Figura 4: Exercício 6.

$\rho\vec{d}/3\epsilon_0$ em que $\vec{d}$ é o vetor que liga os centros das duas esferas. **Dica**: use o princípio da superposição.

8. Calcule a distribuição de cargas que produz o campo elétrico $\vec{E}(r) = \frac{1}{r^2}[1-\cos(3r)]\hat{r}$. **Dica**: aplicação da lei de Gauss no formato diferencial.

9. Dois cilindros longos formam um cabo coaxial. O cilindro interno é um corpo maciço de raio a e densidade volumétrica de carga ρ. O cilindro externo possui raio interno b, raio externo c e está carregado com uma densidade uniforme de carga $-\rho$. Determine o vetor campo elétrico para (a) $0 \leq r \leq a$, (b) $a \leq r \leq b$, (c) $b \leq r \leq c$, (d) $r \geq c$. Esboce o gráfico do campo elétrico em função do raio.

10. Uma distribuição de cargas não-uniforme, mas com simetria esférica,

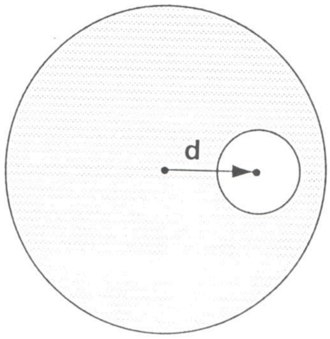

Figura 5: Exercício 7.

produz um campo elétrico de módulo $E = Cr^4$ em que C é uma constante e r é a distância radial em relação ao centro da esfera. O campo elétrico é divergente. Qual é a distribuição volumétrica de cargas ρ?