Física 3 (EMB5043): Campo elétrico

MATERIAL DE APOIO PARA CURSO PRESENCIAL

Prof. Diego Alexandre Duarte
Universidade Federal de Santa Catarina | Centro Tecnológico de Joinville

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

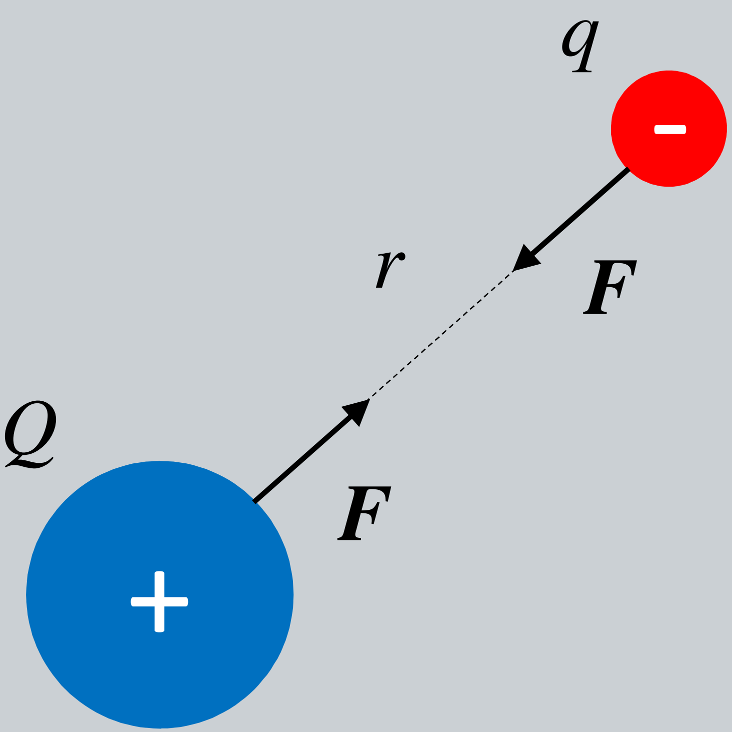
Sumário

- Definição de campo elétrico
- Princípio da superposição
- Exemplo: cálculo de campo elétrico gerado por um dipolo elétrico (molécula)
- Utilização da plataforma *Phet*
- Resolução de problemas da Lista 2 para carga pontual
- Cálculo de campo elétrico para cargas distribuídas
- Resolução de problemas da Lista 2 para cargas distribuídas

Material para estudos

- Capítulo 22 do Halliday volume 3 e capítulo 3 do Moysés volume 3
- Estudar os problemas da Lista 2 que está disponível em diegoduarte.paginas.ufsc.br.

Definição de campo elétrico



A lei de Coulomb define a força **F** de interação entre duas cargas +Q e -q como:

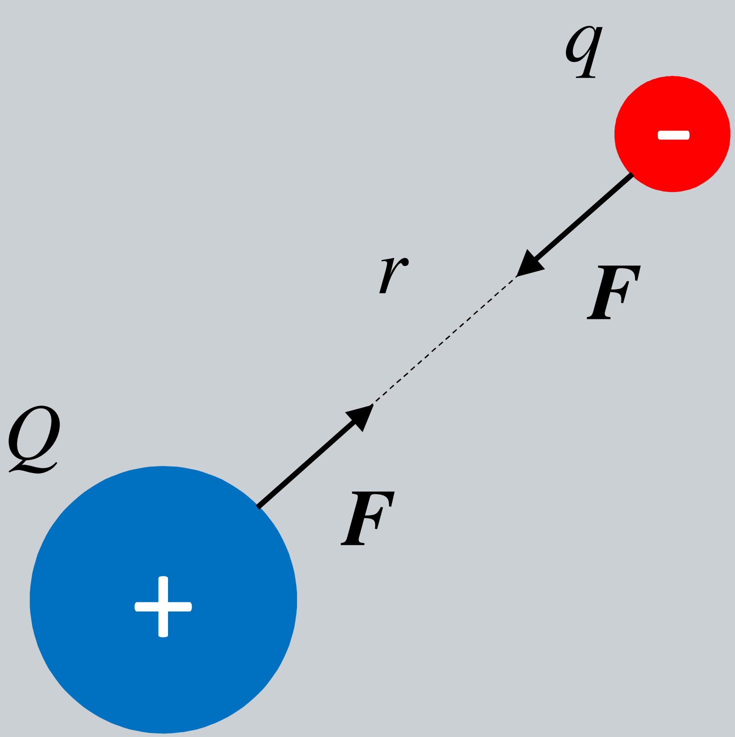
$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Considerando q uma carga de teste, podemos definir o quanto de força a carga Q exerce sobre cada unidade de carga q.

Exemplo: Se F = 10 N e q = 10 C, a carga Q exerce uma força de 1 N sobre cada coulomb da carga q, *i.e.*, exerce 1 N/C. A partir desta definição formulamos o conceito de *campo elétrico* gerado por uma carga Q sobre um ponto do espaço onde encontra-se q:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$ (unidade no S.I.: N/C)

Definição de campo elétrico



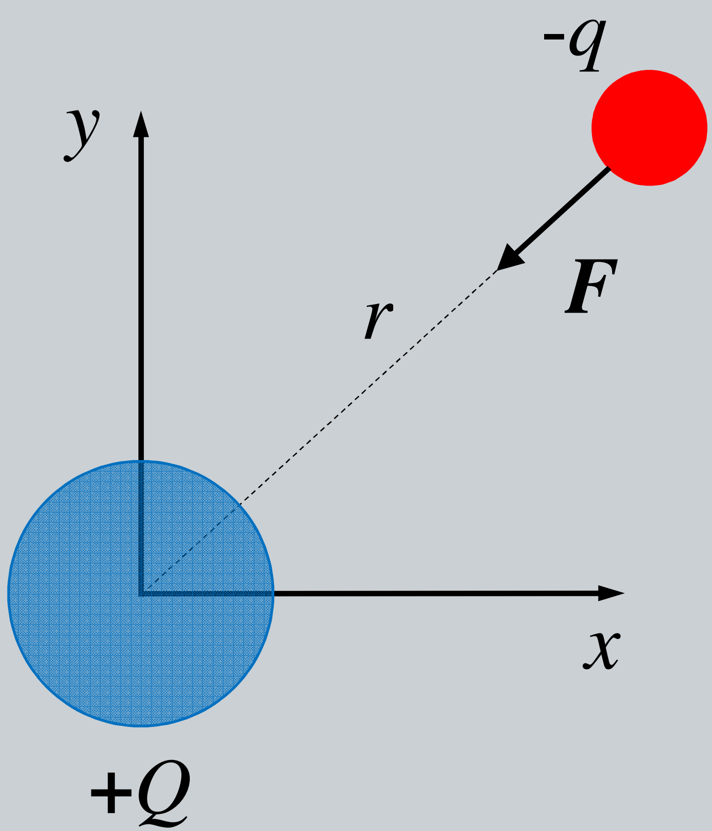
Esta equação mostra que o campo elétrico é uma grandeza vetorial, pois a multiplicação de uma grandeza vetorial (***F***) por uma grandeza escalar (*1/q*) gera outra grandeza vetorial (***E***).

O campo elétrico representa um campo de vetores no plano ou espaço, conforme será descrito nos próximos slides.

A intensidade do campo elétrico gerado por Q representa o quanto de força ela aplica sobre cada coulomb da carga teste. Sabendo este valor, conseguimos calcular a força total sobre qualquer carga teste.

Exemplo: Se o campo elétrico no ponto vale 1 N/C, a força total sobre q = 10 C vale 10 N, sobre q = 100 C vale 100 N e assim sucessivamente.

Definição de campo elétrico



Considerando a carga Q (também chamada de *carga fonte*) como a origem do sistema de coordenadas, notamos que a força aplicada sobre a carga de teste $-q$ tem natureza convergente, *i.e.*, o vetor ***F*** aponta para a origem do sistema de coordenadas. Se posicionarmos q em qualquer outra região do espaço, a força terá o mesmo comportamento!

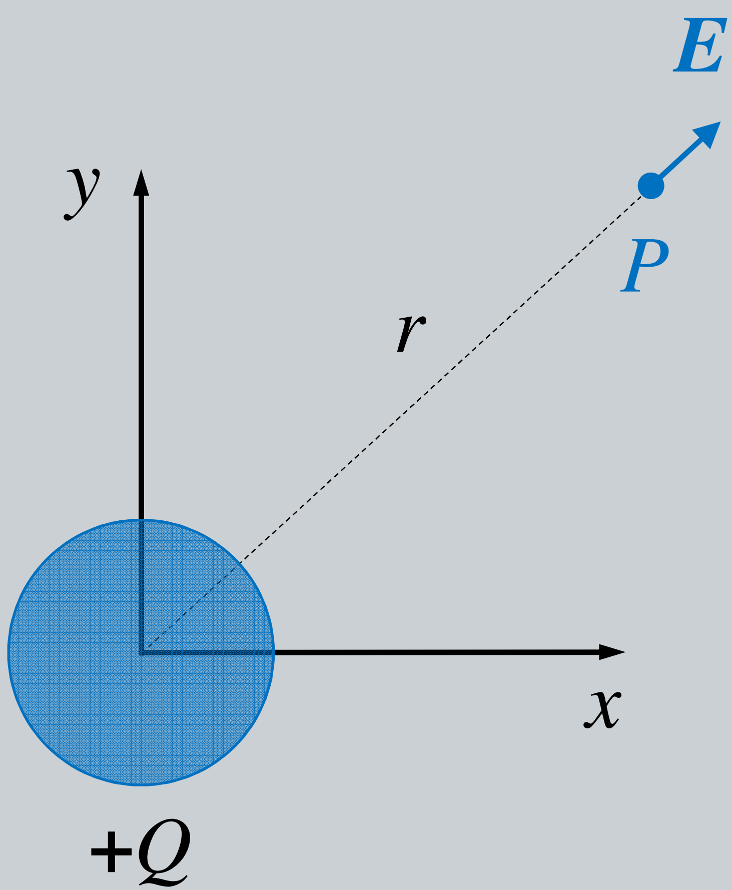
Desta forma, a força ***F*** tem sentido radial negativo, o que implica que ***F*** e $-q$ têm sinais negativos na equação abaixo:

$$\vec{E} = \frac{-\vec{F}}{-q} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad (1)$$

O resultado da equação (1) mostra que o campo elétrico gerado por Q é divergente no ponto P, *i.e.*, o vetor ***E*** tem sentido radial positivo.

Obs.: Para obter o resultado da equação (1), substituímos a lei de Coulomb no lugar da força ***F***

Definição de campo elétrico

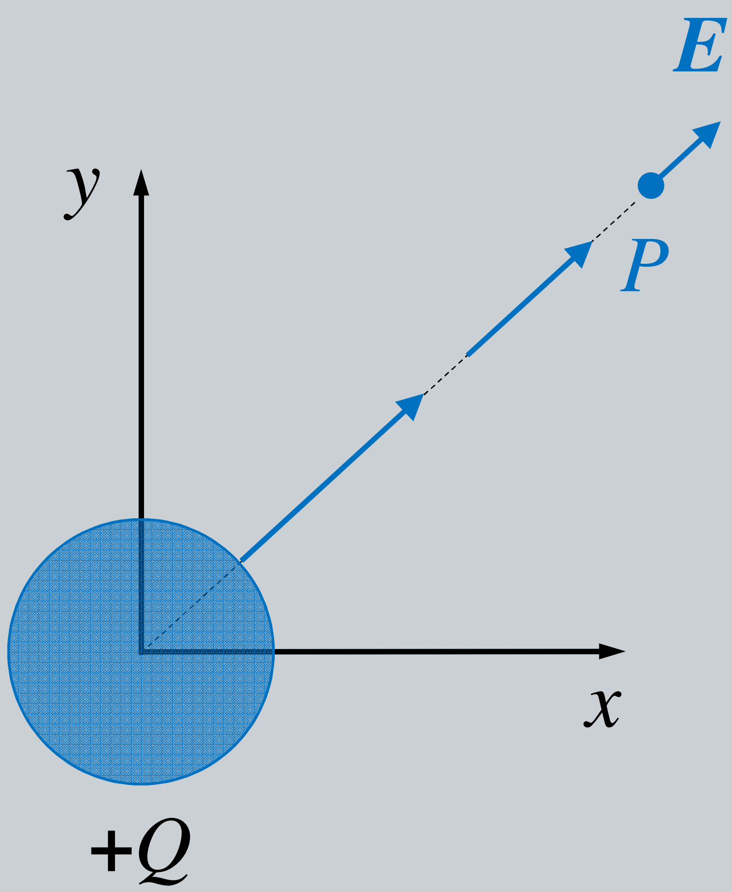


Assim, <u>o campo elétrico gerado por uma carga positiva é divergente!</u>

A equação (1) não depende da carga teste, o que mostra que o campo elétrico produzido em qualquer região do espaço depende apenas da carga fonte!

Isso significa que para calcular o campo elétrico numa região do espaço, não é necessário que exista carga no ponto.

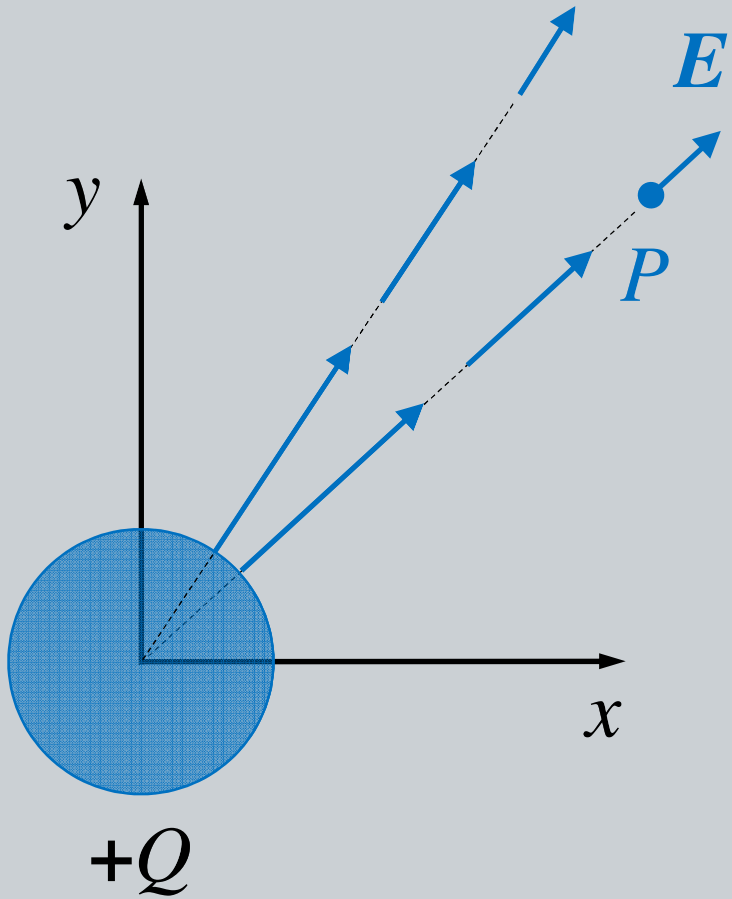
Definição de campo elétrico



Podemos representar vários vetores ao longo do segmento *r* que representam a intensidade do campo elétrico nos respectivos pontos.

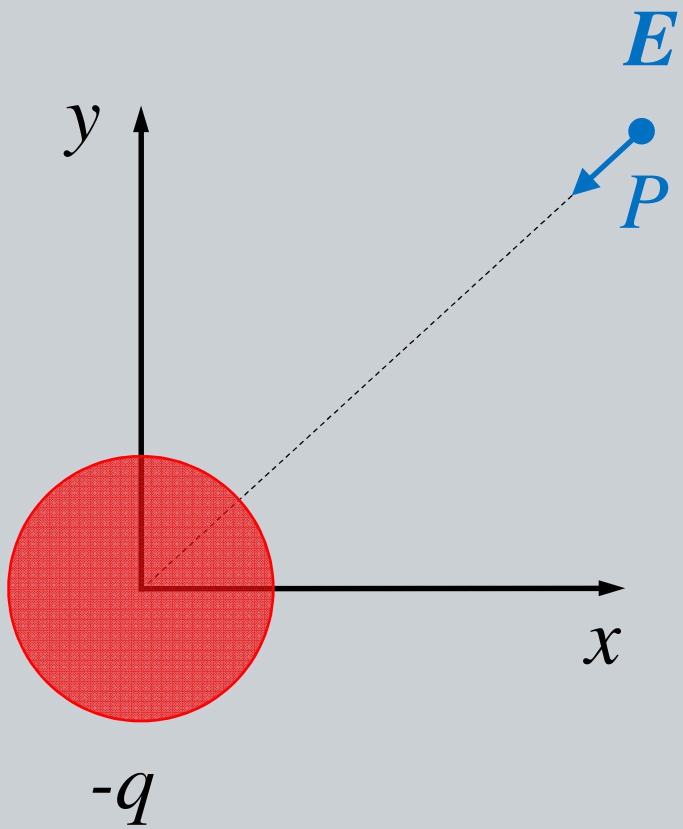
A intensidade do vetor aumenta a medida que a distância *r* diminui, pois o campo elétrico fora da carga é inversamente proporcional à distância *r*.

Definição de campo elétrico



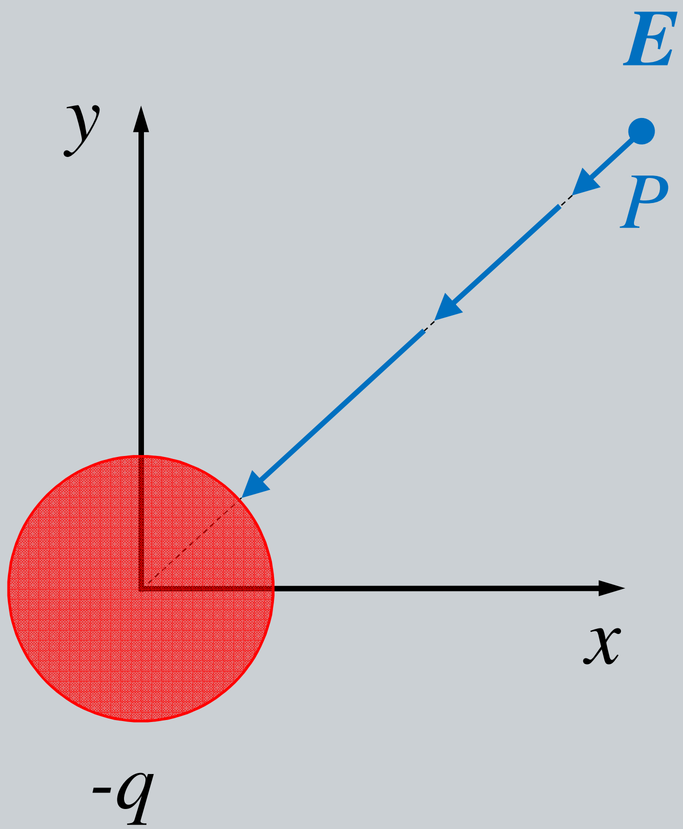
Ao extrapolarmos esta análise para todas as direções, construímos o campo elétrico (campo de vetores) gerado por esta carga!

Definição de campo elétrico



Ao analisarmos o campo elétrico gerado por uma carga $-q$ na origem e uma carga de teste $+Q$ no ponto P, concluímos que o campo elétrico tem sentido radial negativo. Assim, o campo elétrico gerado por uma carga negativa é convergente.

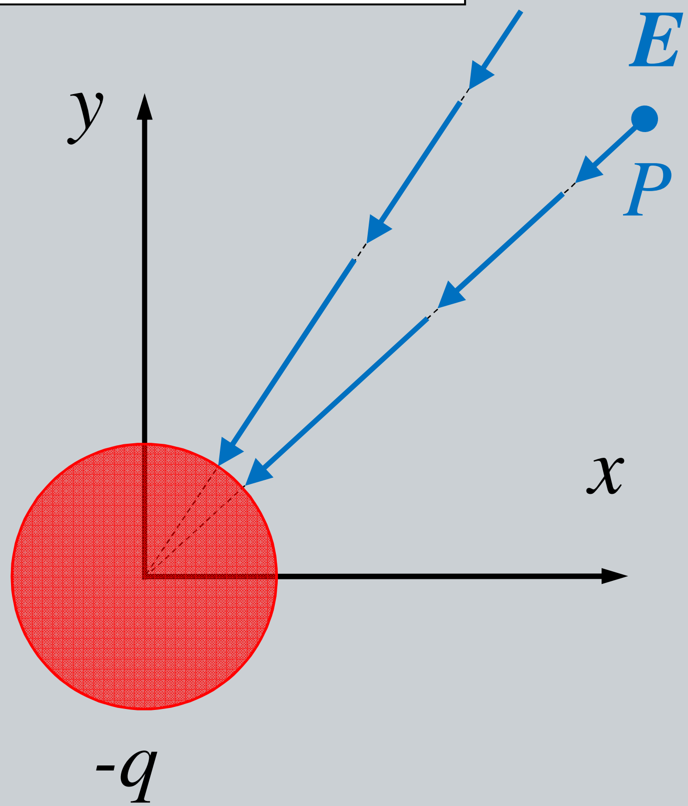
Definição de campo elétrico



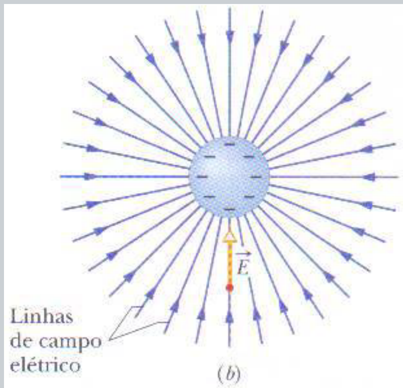
Podemos também representar vários vetores ao longo do segmento *r* que representam a intensidade do campo elétrico nos respectivos pontos.

Definição de campo elétrico

Os vetores do campo elétrico definem as chamadas de *linhas de força* ou *linhas de campo elétrico*



<u>Ao extrapolarmos esta análise para todas as direções, construímos o campo elétrico gerado por esta carga</u>!



Halliday *et al.*,
Fundamentos de Física
(vol. 3)

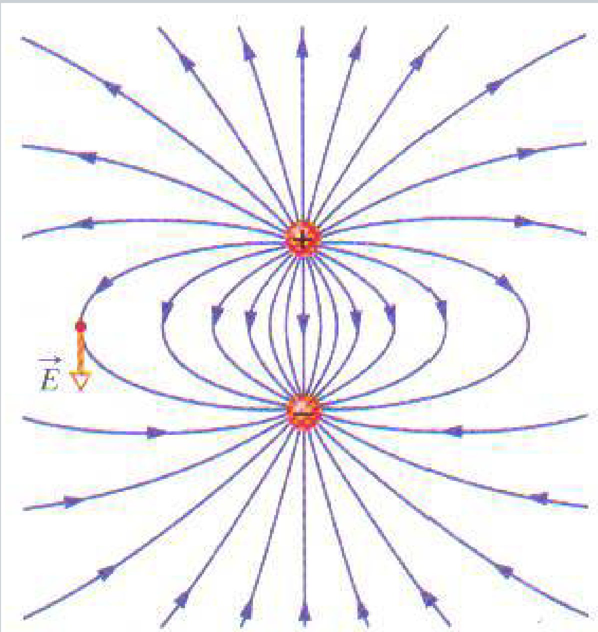
O campo elétrico num ponto qualquer do espaço depende apenas da carga fonte!

Princípio da superposição

Uma reta tangente em qualquer ponto de uma linha de força fornece a direção do campo elétrico naquele ponto! Para calcular as linhas de força, usamos o princípio da superposição.

Quando queremos calcular o campo elétrico gerado por duas ou mais cargas, aplicamos o princípio da superposição. No exemplo abaixo, o campo elétrico sobre o ponto onde encontra-se q é igual a soma dos campos produzidos por Q_1 e Q_2. Se calcularmos a força total sobre q, basta dividir o resultado por q para também obtermos o campo elétrico resultante.

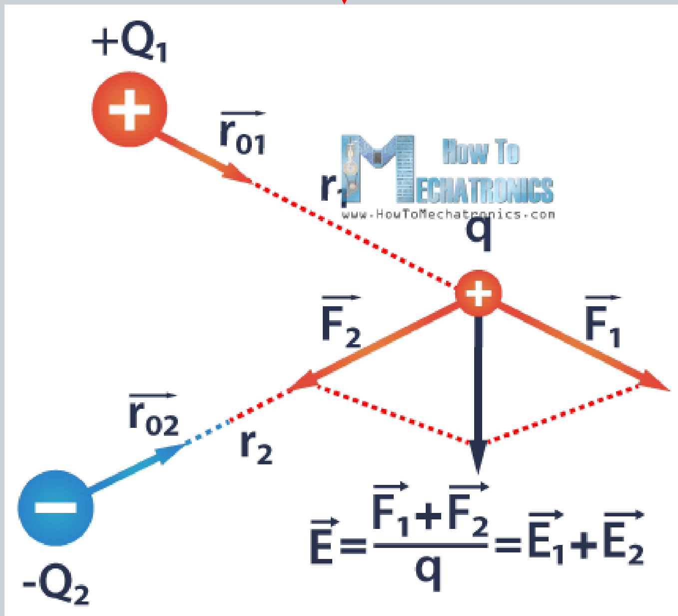
$$\vec{E}_{total} = \sum_i \vec{E}_i$$



Halliday *et al.*, Fundamentos de Física (vol. 3)

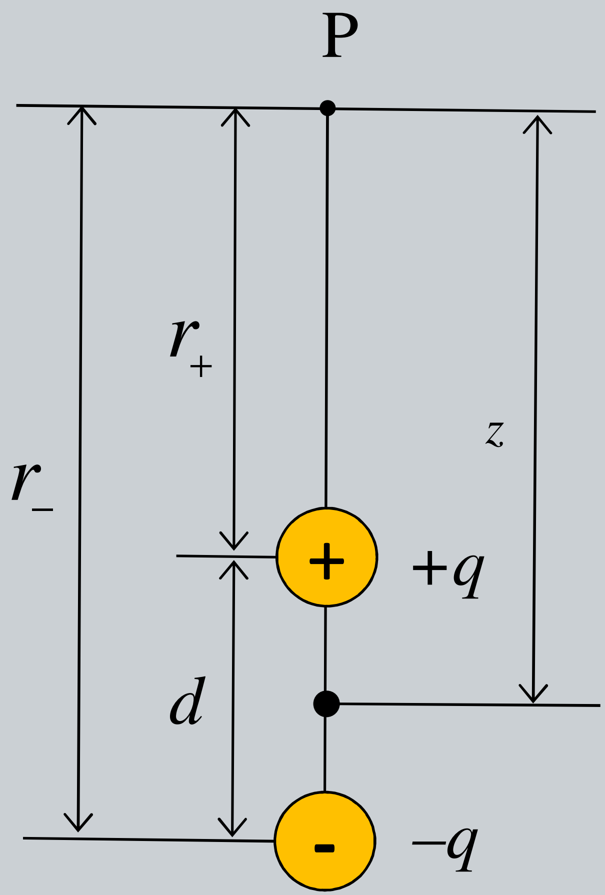
Duas cargas de sinais opostos formam o chamado dipolo elétrico. Um exemplo clássico é a molécula de água.

Na molécula H_2O, o oxigênio desloca a nuvem eletrônica dos hidrogênios para si, deixando os hidrogênios com carga positiva. O oxigênio adquire carga negativa, formando um dipolo.



Exemplo

CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UM DIPOLO ELÉTRICO



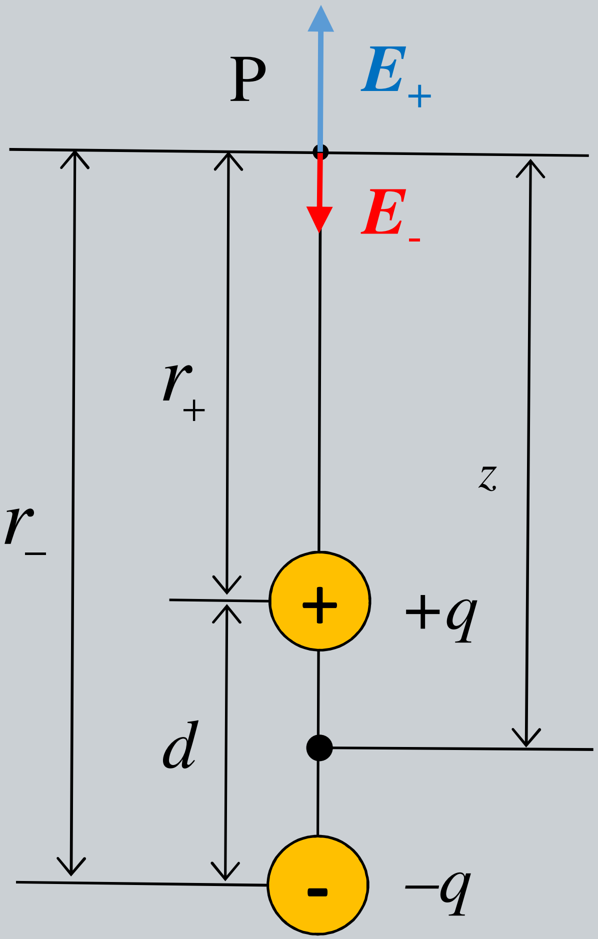
- Considere as duas cargas da figura ao lado dispostas ao longo de um eixo vertical z. Calcule o valor do campo elétrico gerado por essas duas partículas no ponto P em função das cargas $+q$ e $-q$, e das distâncias d e z apresentadas no diagrama. A distância z é a distância de P até o CM da molécula.

- Valide seu resultado com o programa Cargas e Campos disponível na plataforma *Phet*.

- Considere que $d << z$ em seu resultado e faça uma análise sobre a validade da equação.

Exemplo

CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UM DIPOLO ELÉTRICO



Com o princípio da superposição, o campo elétrico no ponto P é dado por:

$$E = E_+ - E_-$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_-^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}\right)$$

em que $r_+ = z - {}^{d}\!/_{2}$ e $r_- = z + {}^{d}\!/_{2}$:

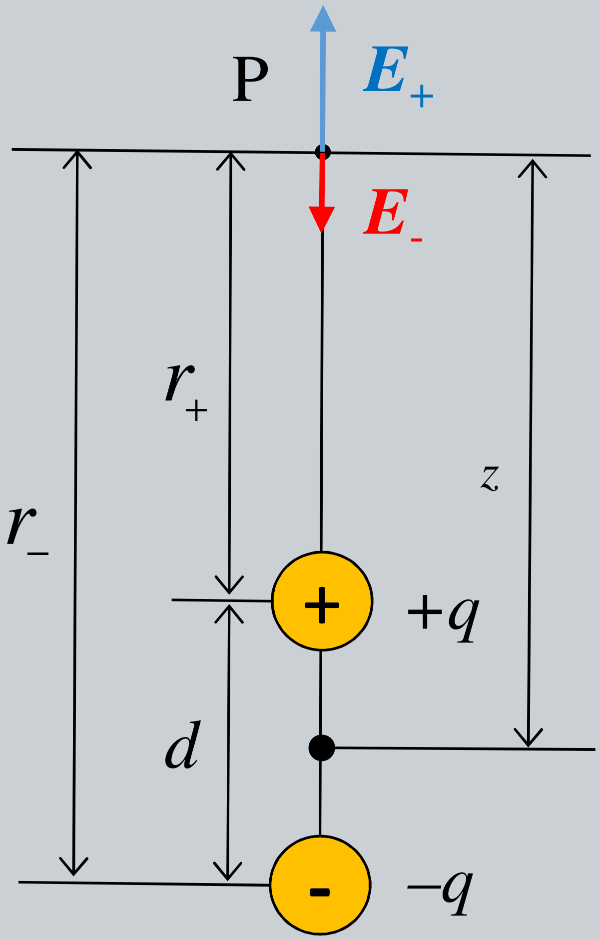
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(z - {}^{d}\!/_{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(z + {}^{d}\!/_{2}\right)^2}\right] \qquad (1)$$

Realizando algumas simplificações em (1), temos:

Obs.: a notação vetorial não foi inserida nas equações por se tratar de um problema unidimensional.

Exemplo

CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UM DIPOLO ELÉTRICO



$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(\cancel{z}+zd+\cancel{d^2/4}\right)-\left(\cancel{z}-zd+\cancel{d^2/4}\right)}{\left(z-d/2\right)^2\left(z+d/2\right)^2}\right]$$

o que resulta em:

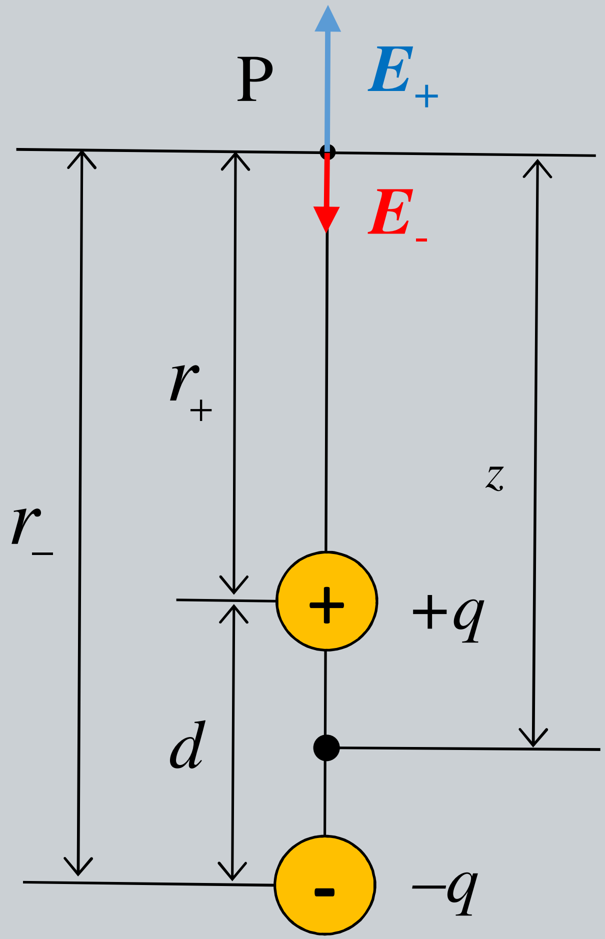
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2zd}{\left(z-d/2\right)^2\left(z+d/2\right)^2}\right]$$

$$\boxed{E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{zd}{\left(z-d/2\right)^2\left(z+d/2\right)^2}\right]} \qquad (2)$$

Campo elétrico gerado pelo dipolo no ponto z

Exemplo

CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UM DIPOLO ELÉTRICO



Para verificar a validade da equação, vamos utilizar o programa *Charge and Fields* da plataforma *Phet*. Para isso, vamos calcular E com a equação (2) e comparar o resultado com o obtido na animação.

Precisamos dos seguintes valores para calcular o campo com a equação (2):

$z = 2{,}193$
$d = 0{,}404$ m
$q = 1$ nC

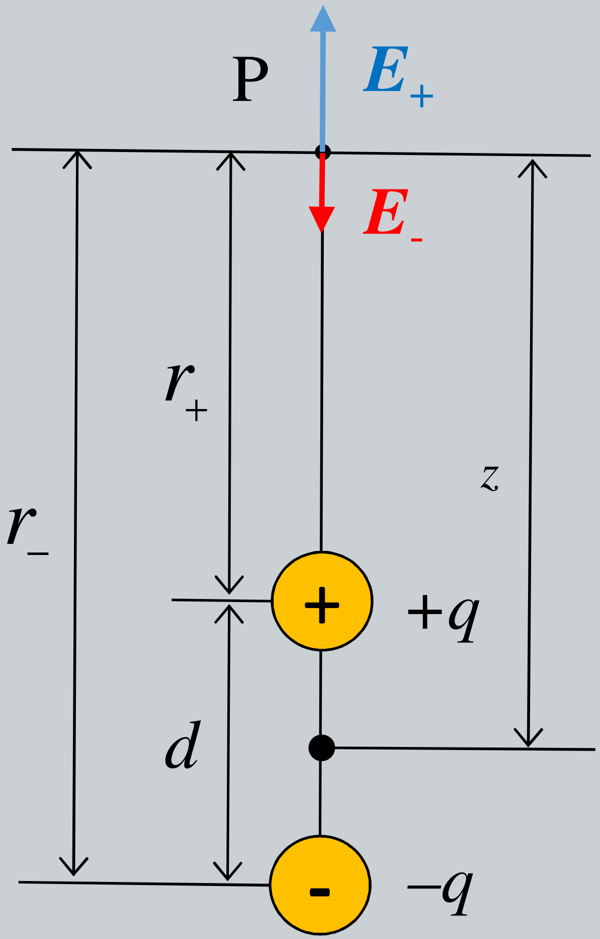
$$\boxed{E_{Phet} = 0{,}71 \text{ N/C}}$$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{zd}{\left(z - d/2\right)^2\left(z + d/2\right)^2}\right] = 0{,}70 \text{ N/C}$$

Obs.: $1/2\pi\varepsilon_0 = 18\times10^9$ N·m^2/C^2

Exemplo

CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UM DIPOLO ELÉTRICO



Comparando esses dados, podemos calcular o erro relativo considerando o valor da simulação virtual (E_{Phet}) como a amostra de referência:

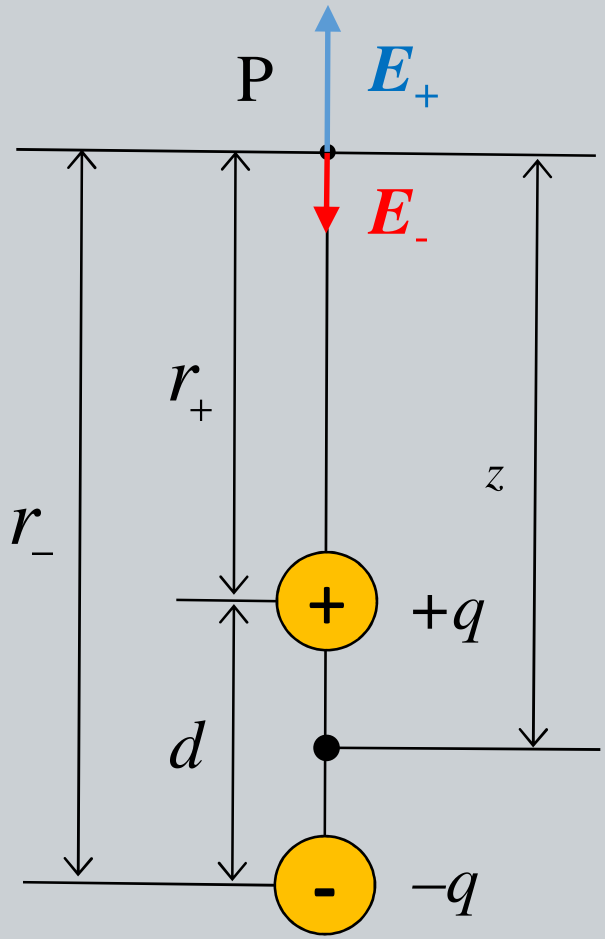
$$\Delta_{\%} = \frac{|E - E_{Phet}|}{E_{Phet}} \times 100 = 1{,}5\%$$

A equação (2) é válida para qualquer valor de z. A partir dela podemos construir uma outra equação válida apenas para $d \ll z$. Isso significa que a distância entre P e o CM (distância z) é muito maior que o tamanho da molécula (comprimento d):

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{zd}{\left(z - d/2\right)^2 \left(z + d/2\right)^2}\right] \approx \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

Exemplo

CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UM DIPOLO ELÉTRICO



Essa equação é chamada equação do dipolo:

$$E \approx \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \tag{3}$$

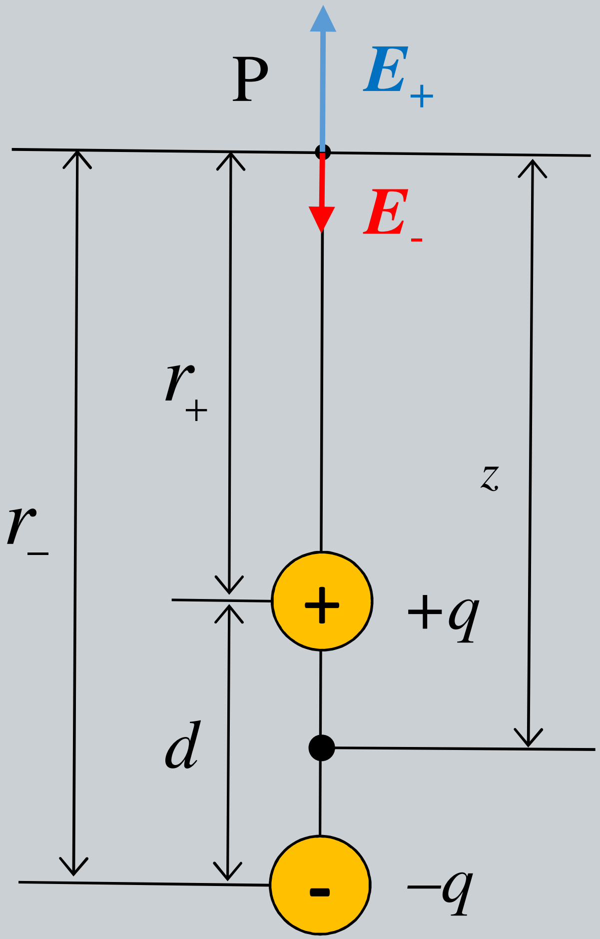
e aplicando os mesmos valores da simulação com a equação (2), obtemos:

$$E \approx \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \approx 0{,}69 \text{ N/C}$$

o que gera um erro relativo de **2,8%**. Este erro é pequeno comparado com a equação (2), mostrando que esse conjunto de valores está dentro da faixa de valores válidos para esta equação.

Exemplo

CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UM DIPOLO ELÉTRICO



Porém, aplicando os valores

$z = 1{,}756$ m
$d = 1{,}509$ m
$q = 1$ nC

$$\boxed{E_{Phet} = 7{,}90 \text{ N/C}}$$

obtemos $E \approx \dfrac{qd}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \approx 5{,}02$ N/C

Este resultado representa um erro relativo de:

$$\Delta_{\%} = \frac{|E - E_{Phet}|}{E_{Phet}} \times 100 = 36{,}4\%$$

demonstrando que esta região não faz parte do conjunto de valores válidos para a equação (3).

Exemplo

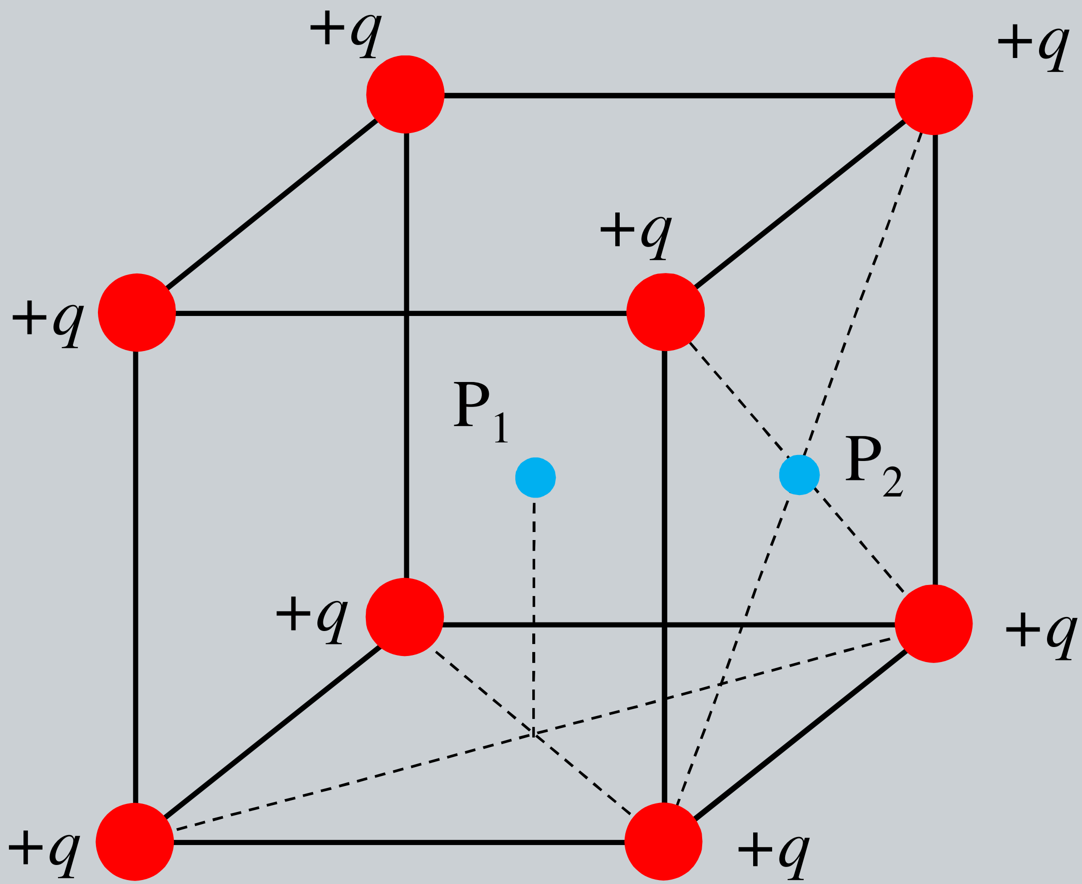
CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UM DIPOLO ELÉTRICO

ATENÇÃO

Os modelos matemáticos que descrevem fenômenos naturais são válidos para determinadas faixas de valores. Prestem muita atenção nesta propriedade, pois ao utilizar uma ferramenta que não é válida para a sua faixa operacional, você cometerá um erro fatal.

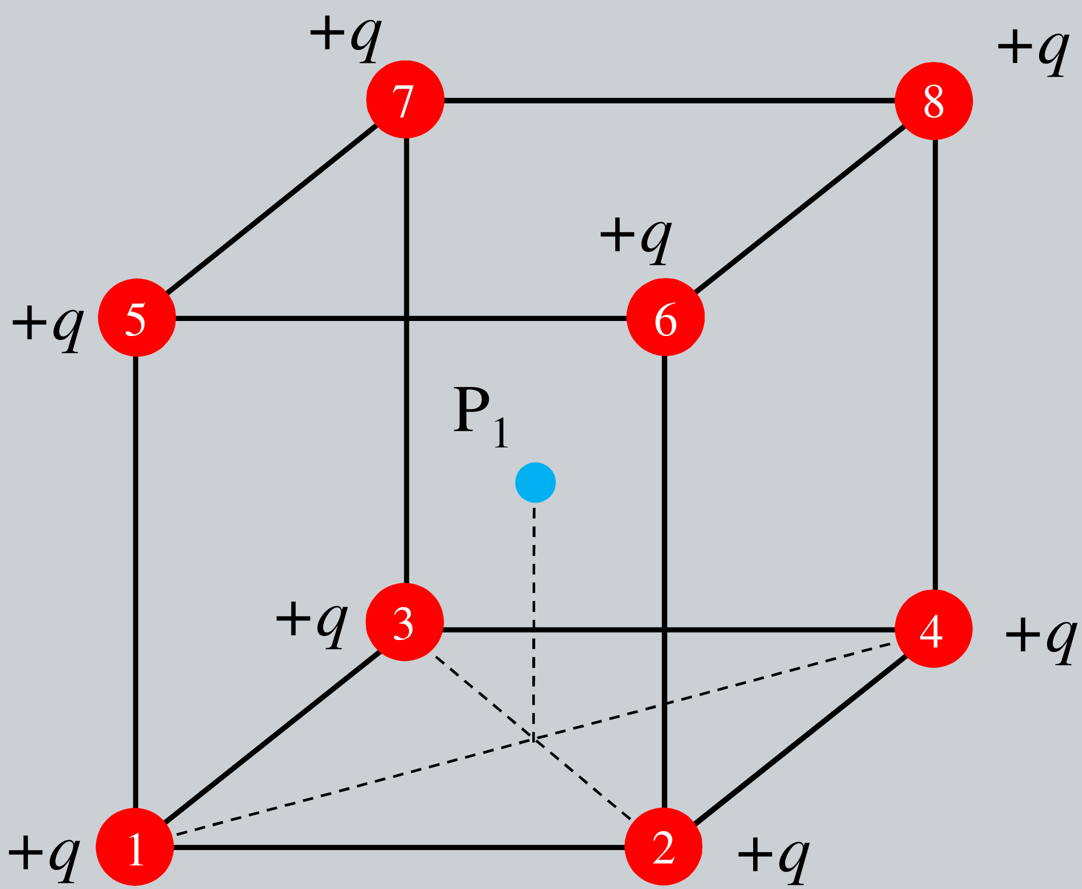
Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 1



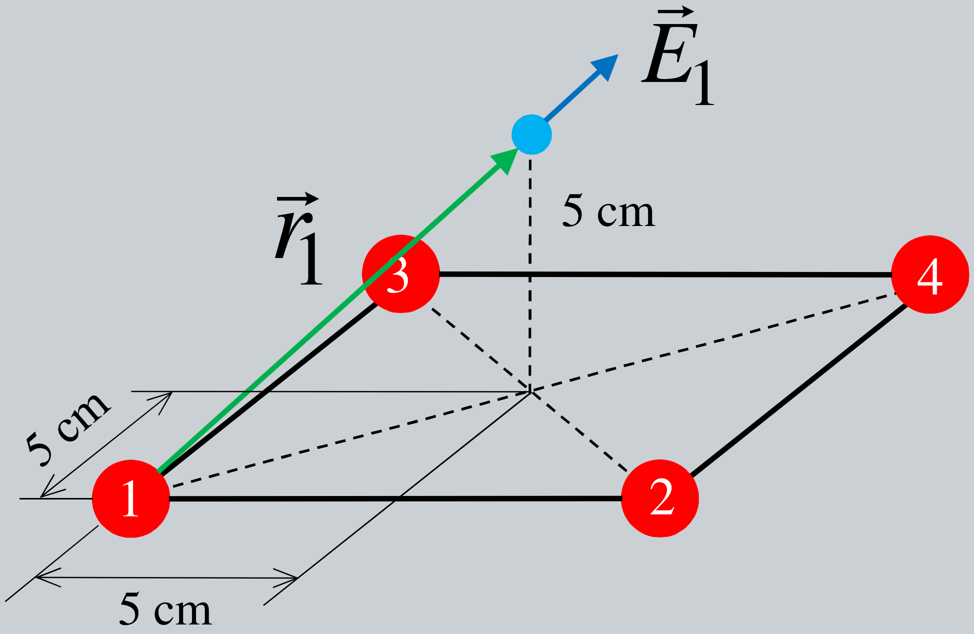
Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 1 – Item (a)



Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 1 – Item (a)



$$\vec{r}_1 = \left(5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \text{ cm e } r_1 = \sqrt{75} \text{ cm}$$
$$\vec{r}_2 = \left(-5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \text{ cm e } r_2 = \sqrt{75} \text{ cm}$$
$$\vec{r}_3 = \left(5\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \text{ cm e } r_3 = \sqrt{75} \text{ cm}$$
$$\vec{r}_4 = \left(-5\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \text{ cm e } r_4 = \sqrt{75} \text{ cm}$$

O campo elétrico total no ponto P é a soma de todos os campos elétricos:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{8} \vec{E}_i \qquad (4)$$

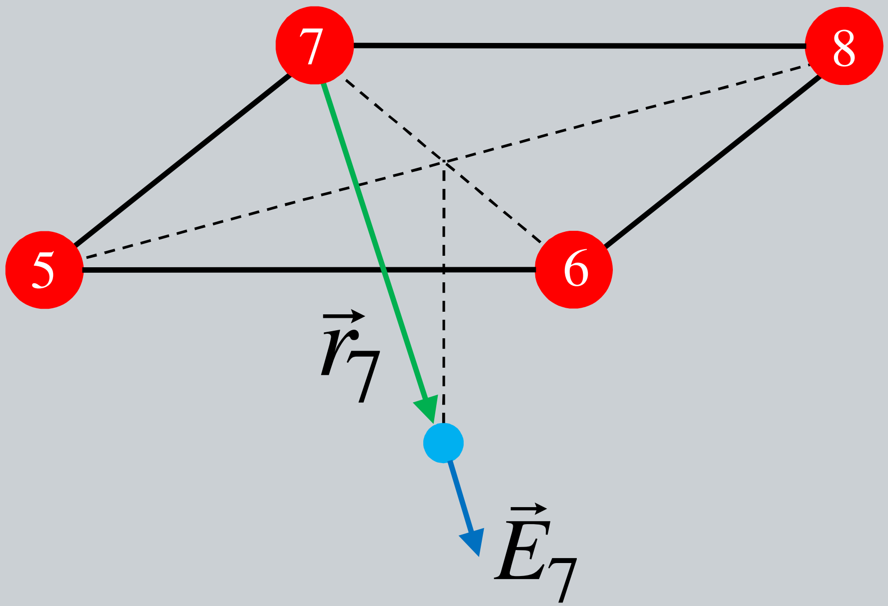
Para calcular os 8 campos individuais, vamos utilizar a notação vetorial. Como mostra a figura ao lado, vamos começar pelas 4 cargas da base. O campo gerado pela carga 1 no ponto P é:

$$\vec{E}_1 = E_1 \hat{r}_1 = E_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{0{,}05q}{4\pi\varepsilon_0 \left(0{,}01 \times \sqrt{75}\right)^3} \left(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}\right)$$

Os demais campos são representados de forma análoga com vetores $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ e $\boldsymbol{r}_4$ ao lado.

Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 1 – Item (a)



$$\vec{r}_5 = \left(5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right)\ \text{cm} \ \text{e} \ r_5 = \sqrt{75}\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_6 = \left(-5\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right)\ \text{cm} \ \text{e} \ r_2 = \sqrt{75}\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_7 = \left(5\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right)\ \text{cm} \ \text{e} \ r_7 = \sqrt{75}\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_8 = \left(-5\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right)\ \text{cm} \ \text{e} \ r_8 = \sqrt{75}\ \text{cm}$$

Os campos elétricos gerados pelas cargas no topo do paralelepípedo são obtidos com os vetores $\boldsymbol{r}_5$, $\boldsymbol{r}_6$, $\boldsymbol{r}_7$ e $\boldsymbol{r}_8$ apresentados ao lado.

Obs.: pratique o que estudamos em sala de aula e determine estes vetores. O seu professor adotou q_1 como referencial.

Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 1 – Item (a)

Assim, o campo elétrico total é:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_m\left(\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}\right) \\ \vec{E}_2 = E_m\left(-\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}\right) \\ \vec{E}_3 = E_m\left(\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k}\right) \\ \vec{E}_4 = E_m\left(-\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k}\right) \\ \vec{E}_5 = E_m\left(\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}\right) \\ \vec{E}_6 = E_m\left(-\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}\right) \\ \vec{E}_7 = E_m\left(\hat{\imath}-\hat{\jmath}-\hat{k}\right) \\ \vec{E}_8 = E_m\left(-\hat{\imath}-\hat{\jmath}-\hat{k}\right) \end{cases}$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

CQD

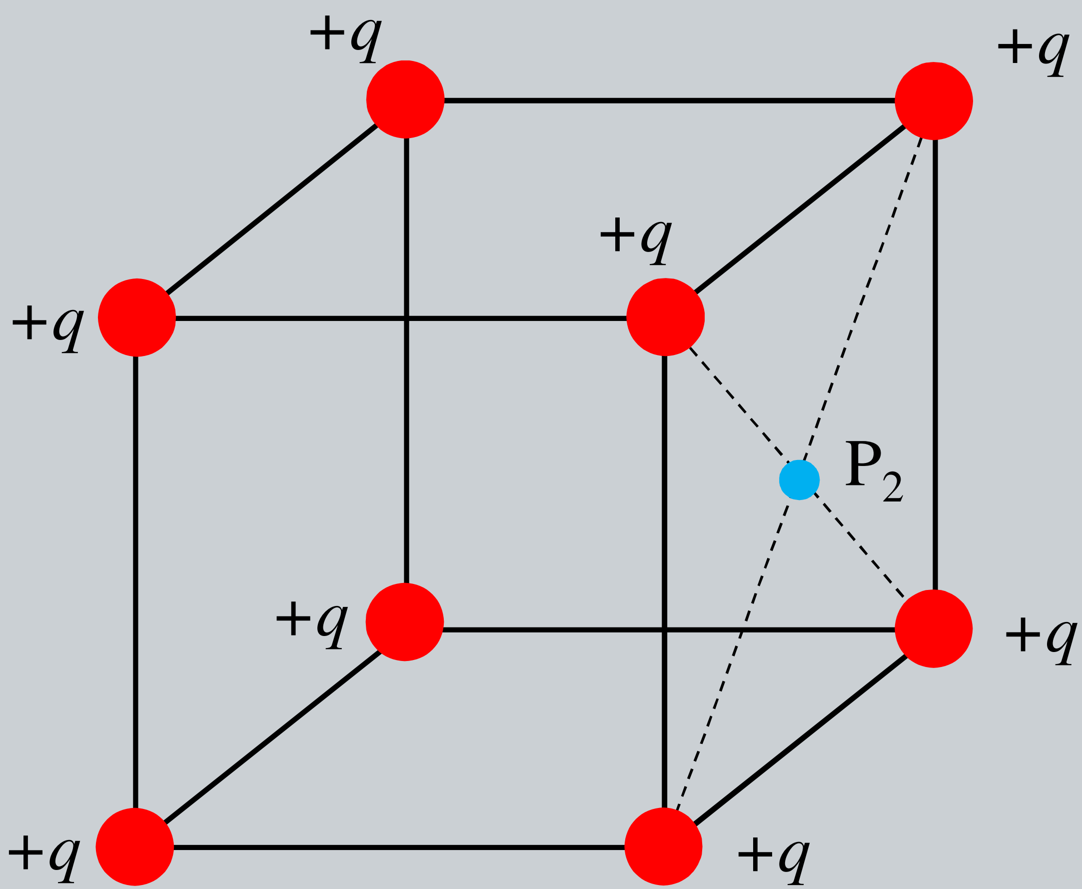
Convertida para metro!

em que: $E_m = \dfrac{\left(\boxed{0{,}05}\right)q}{4\pi\varepsilon_0\left(\boxed{0{,}01\times\sqrt{75}}\right)^3}$

Convertida para metro!

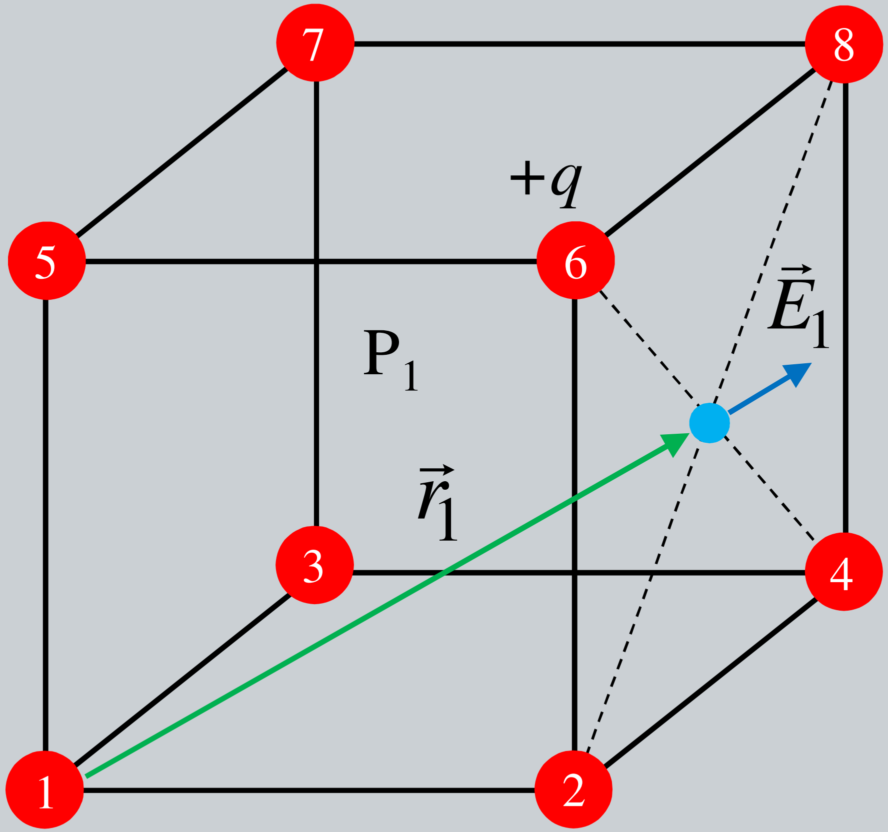
Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 1 – Item (b)



Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 1 – Item (b)



Os campos elétricos gerados pelas cargas 2, 4, 6 e 8 se anulam sobre o ponto P_2. A prova é igual ao que fizemos nos slides anteriores (faça isso para treinar a construção dos vetores!). O campo elétrico total é gerado apenas pelas cargas 1, 3, 5 e 7:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3 + \vec{E}_5 + \vec{E}_7$$

onde os vetores são dados por:

$$\vec{r}_1 = \left(10\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \text{ cm e } r_1 = \sqrt{150} \text{ cm}$$

$$\vec{r}_3 = \left(10\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 5\hat{k}\right) \text{ cm e } r_3 = \sqrt{150} \text{ cm}$$

$$\vec{r}_5 = \left(10\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right) \text{ cm e } r_5 = \sqrt{150} \text{ cm}$$

$$\vec{r}_7 = \left(10\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 5\hat{k}\right) \text{ cm e } r_7 = \sqrt{150} \text{ cm}$$

Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 1 – Item (b)

Assim, o campo elétrico total é:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = E_m\left(2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) \\ \vec{E}_3 = E_m\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) \\ \vec{E}_5 = E_m\left(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right) \\ \vec{E}_7 = E_m\left(2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}\right) \end{cases}$$

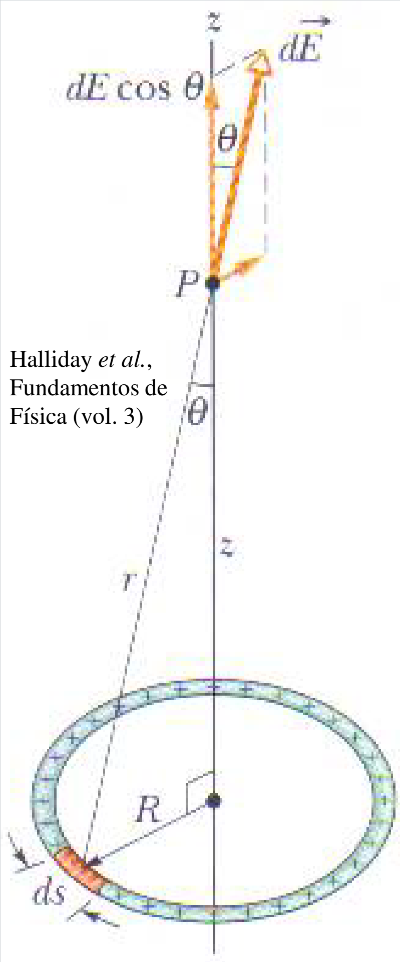
$$\vec{E} = 8E_m\hat{i}$$

em que: $E_m = \dfrac{0,05q}{4\pi\varepsilon_0\left(0,01\times\sqrt{150}\right)^3}$

Portanto:

$$\vec{E} = 8\left(\frac{0,05q}{4\pi\varepsilon_0\left(0,01\times\sqrt{150}\right)^3}\right)\hat{i} = \frac{0,40q}{4\pi\varepsilon_0\left(0,01\times\sqrt{150}\right)^3}\hat{i} = 1,96q\times10^{12}\,\hat{i}\ \text{N/C}$$

Cálculo de campo elétrico
PARA CARGAS DISTRIBUÍDAS



Halliday *et al.*, Fundamentos de Física (vol. 3)

Calcule o campo elétrico gerado no ponto P por uma carga q distribuída uniformemente ao longo de um anel de raio R, conforme mostra a figura ao lado.

Para calcular o campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas num ponto qualquer do espaço, usamos os três passos que estudamos em Lei de Coulomb:

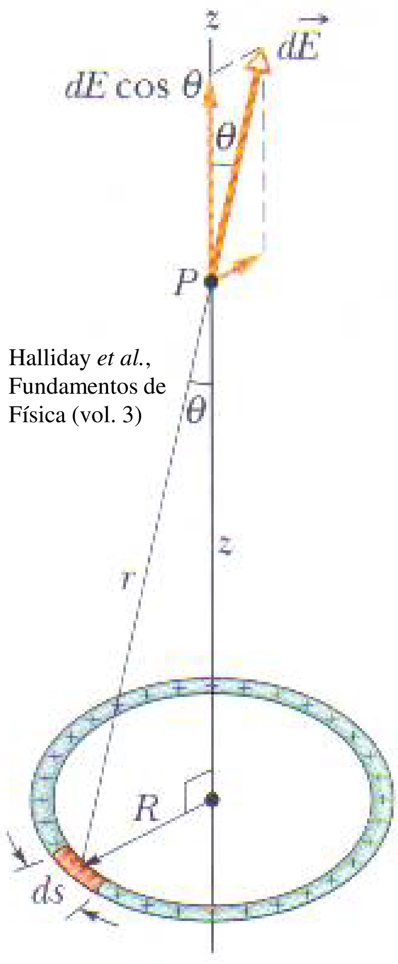
1º passo: *calcular o campo elétrico de um elemento dQ no ponto P*:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + z^2\right)} \qquad (5)$$

em que dQ é um elemento de carga do comprimento ds do anel.

Cálculo de campo elétrico

PARA CARGAS DISTRIBUÍDAS



Halliday *et al.*, Fundamentos de Física (vol. 3)

2º passo: *determinar o campo elétrico resultante dE_r*:

$$dE_r = dE\cos\theta = dE\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \qquad (6)$$

Substituindo a equação (5) em (6):

$$dE_r = \frac{z\,dQ}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

3º passo: *escrever dQ em função da densidade de carga e da variável independente do problema, e realizar a integração do elemento dE_r para obtenção do campo elétrico total*:

$$E_r = \int \frac{z\,dQ}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} = \int \frac{z\lambda\,ds}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Densidade linear de carga

$$\lambda = \frac{dQ}{ds}$$

Cálculo de campo elétrico

PARA CARGAS DISTRIBUÍDAS

Halliday *et al.*, Fundamentos de Física (vol. 3)

Como a função não depende de *s*, temos:

$$E_r = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} ds = \frac{2\pi R z\lambda}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$

em que $q = 2\pi R\lambda$ é a carga total e uniformemente distribuída no anel. Logo, o campo elétrico é dado por:

$$E_r = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2+z^2\right)^{3/2}} \tag{7}$$

A equação (7) possui algumas particularidades:

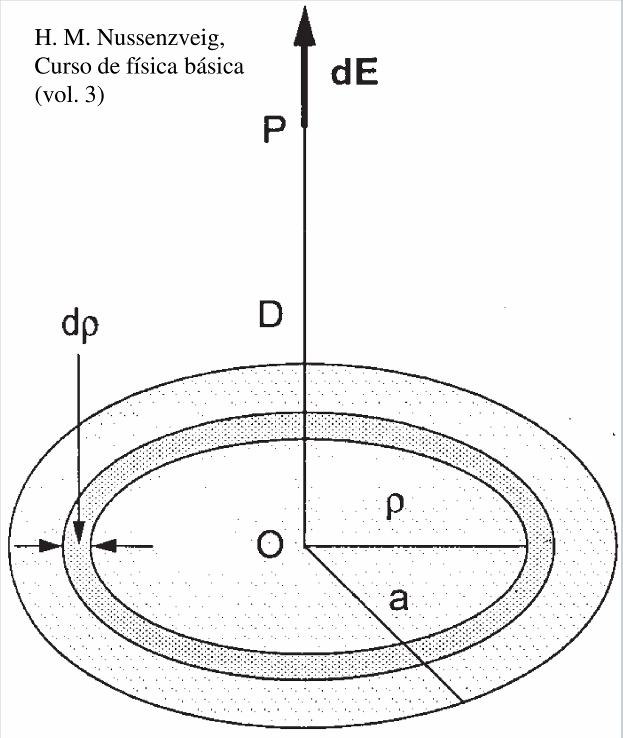
• Se $z = 0$, $E_r = 0$: devido a simetria, a soma de todos os vetores de campo elétrico se anulam.

• Se $z >> R$, o anel se transforma em uma carga pontual, pois ao aplicarmos essa condição, temos:

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

Cálculo de campo elétrico

PARA CARGAS DISTRIBUÍDAS



Calcule o campo elétrico gerado no ponto P por uma carga q distribuída uniformemente sobre a superfície de um disco raio a que possui densidade superficial de carga σ. O centro O está uma distância D do ponto P.

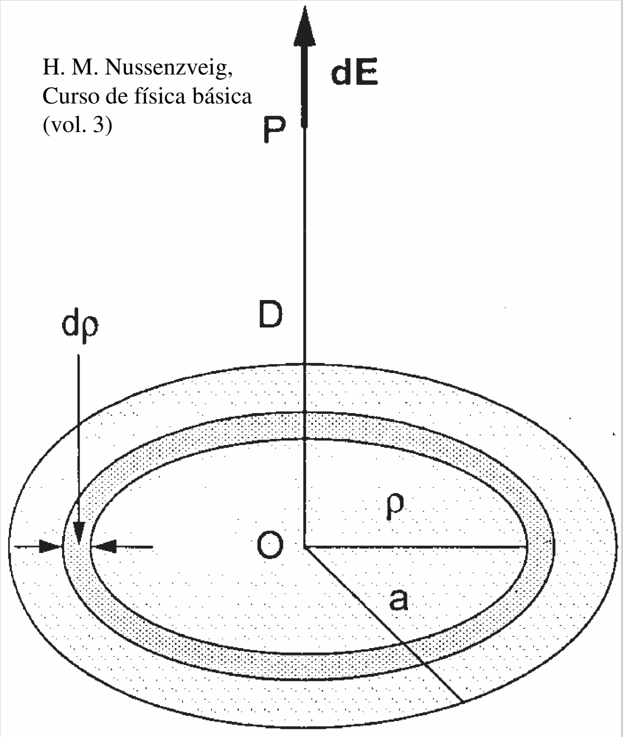
Neste cálculo vamos considerar que o disco é formado por infinitos anéis concêntricos. Vamos aplicar o **1º passo** para um destes anéis que possui carga *dQ* (região sombreada da figura ao lado). O campo é dado pela equação (7):

$$dE = \frac{D\,dq}{4\pi\varepsilon_0\left(\rho^2 + D^2\right)^{3/2}} \qquad (8)$$

em que $z = D$ e $R = \rho$. Ao realizar este procedimento, concluímos também o **2º passo**, pois dE é parte do campo total.

Cálculo de campo elétrico

PARA CARGAS DISTRIBUÍDAS

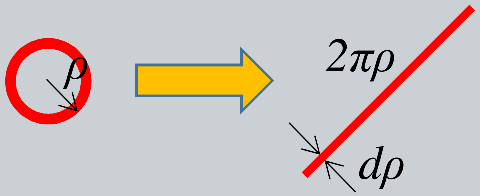


Para calcular o campo total, precisamos integrar esta equação em relação ao raio ρ (**3º passo**):

$$E = \int \frac{Ddq}{4\pi\varepsilon_0\left(\rho^2 + D^2\right)^{3/2}} = \int \frac{D\sigma dA}{4\pi\varepsilon_0\left(\rho^2 + D^2\right)^{3/2}}$$

em que $\sigma = dq/dA$ é a densidade superficial de carga. O elemento dA representa a área superficial do anel de largura infinitesimal $d\rho$. Assim, $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi\rho d\rho$:

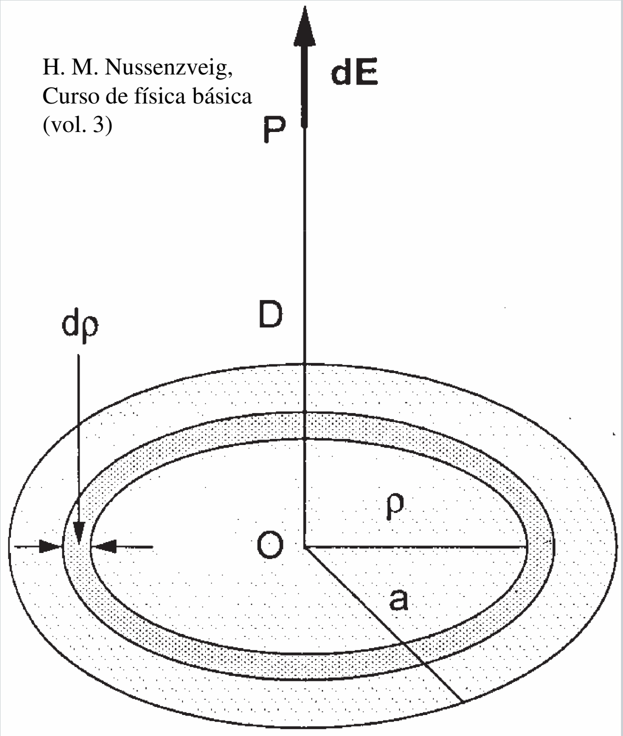
$$E = \int \frac{D\sigma 2\pi\rho d\rho}{4\pi\varepsilon_0\left(\rho^2 + D^2\right)^{3/2}} \qquad (9)$$



*Obs.: *Para escrever $dA = 2\pi\rho d\rho$ transforme o anel num segmento de comprimento $2\pi\rho$ e espessura $d\rho$. A área dessa reta é o produto da base e a altura, logo obtemos $2\pi\rho d\rho$.*

Cálculo de campo elétrico

PARA CARGAS DISTRIBUÍDAS



Para obter o campo elétrico resultante, basta integrar a equação (9):

$$E = \frac{\sigma D}{2\varepsilon_0} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + D^2\right)^{3/2}} \qquad (10)$$

A integração é feita mediante a troca de variáveis:

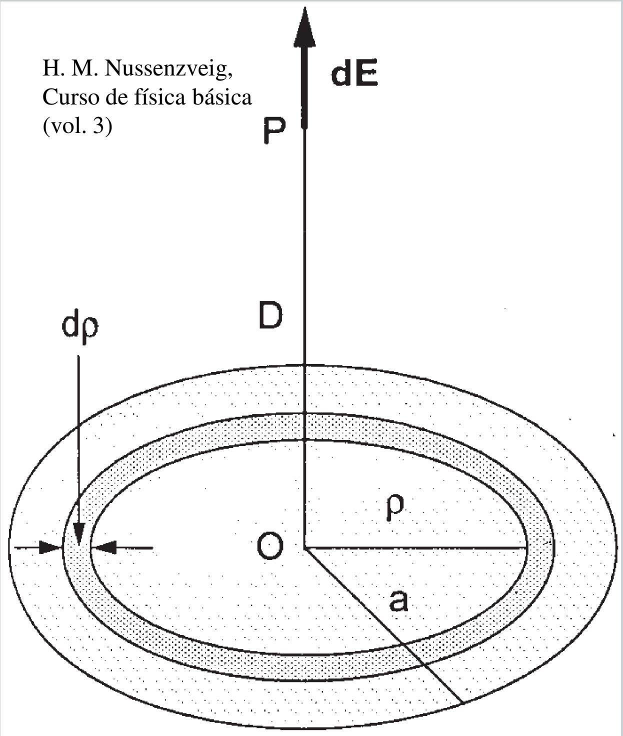
$$\begin{aligned} \rho &= D \tan \alpha \\ d\rho &= D(\sec\alpha)^2\, d\alpha \end{aligned} \qquad (11)$$

Substituindo as relações (11) em (10), temos:

$$E = \frac{\sigma D}{2\varepsilon_0} \int_0^a \frac{D^2 \tan\alpha (\sec\alpha)^2\, d\alpha}{\left[(D\tan\alpha)^2 + D^2\right]^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^a \frac{\tan\alpha(\sec\alpha)^2\, d\alpha}{\left[(\tan\alpha)^2 + 1\right]^{3/2}}$$

Cálculo de campo elétrico

PARA CARGAS DISTRIBUÍDAS



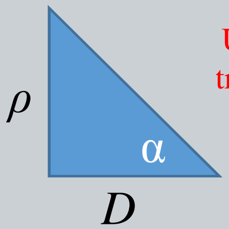
em que $(\tan \alpha)^2 + 1 = (\sec \alpha)^2$. Assim:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{\tan\alpha(\sec\alpha)^{\cancel{2}}\,d\alpha}{(\sec\alpha)^{\cancel{3}}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{\tan\alpha\, d\alpha}{\sec\alpha}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a \sin\alpha\, d\alpha = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cos\alpha\Big|_0^a = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{D}{\sqrt{\rho^2+D^2}}\Bigg|_0^a$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{D}{\sqrt{a^2+D^2}}\right)}$$

Campo elétrico gerado por um disco circular



Use o triângulo ao lado para transformar cos α na variável original do problema.

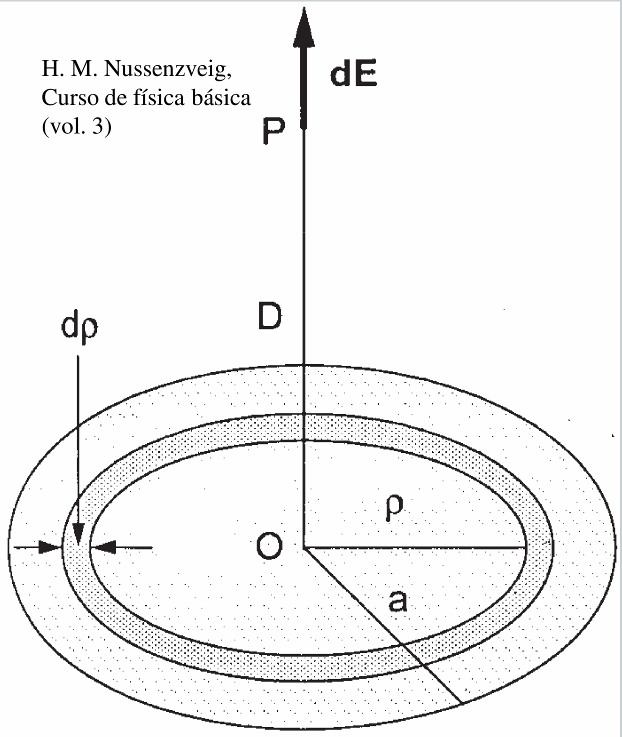
$\tan \alpha = \rho/D$

Particularidades do resultado:

- Se $a = 0$, $E = 0$, pois não existe o disco.
- Se $D << a$, $E = \sigma/2\varepsilon_0$. Isso significa que o campo elétrico é constante para distâncias muito próximas da superfície do disco. **Guarde este resultado para quando estudarmos capacitores.**

Cálculo de campo elétrico

PARA CARGAS DISTRIBUÍDAS



Podemos resolver este exercício de uma forma muito mais rápida. Ao resolvermos o item (a) do problema 11 na lista 1, concluímos que a força sobre uma carga q no ponto P é dada por:

$$F = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right)$$

Reescrevendo essa equação com as variáveis deste problemas, temos:

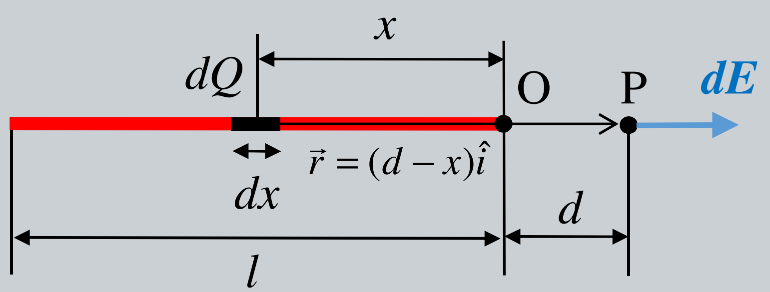
$$F = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{D}{\sqrt{a^2 + D^2}}\right)$$

Dividindo ambos os lados da equação acima por q, obtemos o campo elétrico:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{D}{\sqrt{a^2 + D^2}}\right)$$

Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 3 – Item (a)



A barra tem comprimento l e carga total Q distribuída homogeneamente. Considerando que dQ está $d - x$ do ponto P (veja o sentido do vetor ***r*** no desenho acima), o campo dE é dado por:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 (d-x)^2} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 (d-x)^2} \qquad (12)$$

em que $\lambda = dQ/dx$.

Para integrar a equação (12) basta aplicar a mudança de variável $u = d - x$:

$$E = \int_{-l}^{0} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 (d-x)^2} = \int_{-l}^{0} \frac{-\lambda du}{4\pi\varepsilon_0 u^2}$$

$$E = -\frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 u}\Bigg|_{-l}^{0} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 (d-x)}\Bigg|_{-l}^{0}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{(d+l)}\right]$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 d(d+l)}}$$

No sentido positivo do eixo x

Obs.: O item (b) fica como tarefa ;)

Resolução de problemas

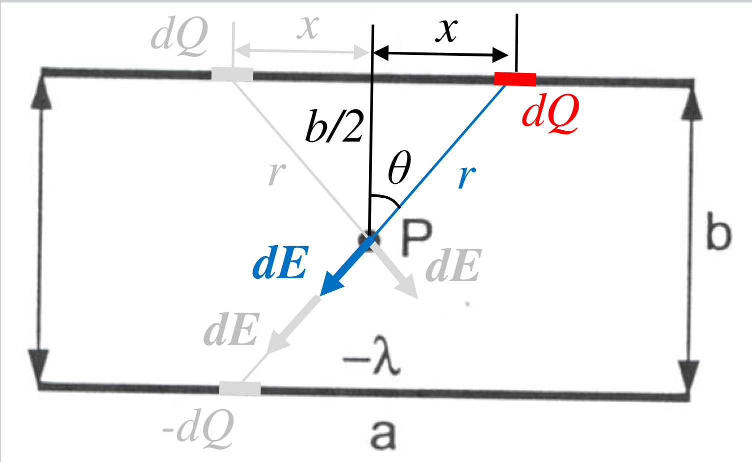
LISTA 2, PROBLEMA 3 – Item (a)

<u>Tarefa</u>: o que significa o resultado da equação abaixo quando $l >> d$?

$$E = \frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 d(d+l)}$$

Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 4



<u>Considerações iniciais:</u>

• dQ (em vermelho) produz um campo dE (em azul) no ponto P.
• Um elemento dQ simétrico no fio positivo também aplica um campo dE no ponto P.
• As componentes horizontais se cancelam e as componentes verticais se somam, criando uma resultante para baixo.
• O fio negativo duplica o campo total.

O elemento dE é dado por:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + b^2/4\right)}$$

e o campo resultante por:

$$dE_r = \boxed{2} dE\cos\theta = 2\frac{b/2\, dQ}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + b^2/4\right)^{3/2}}$$

2 fios

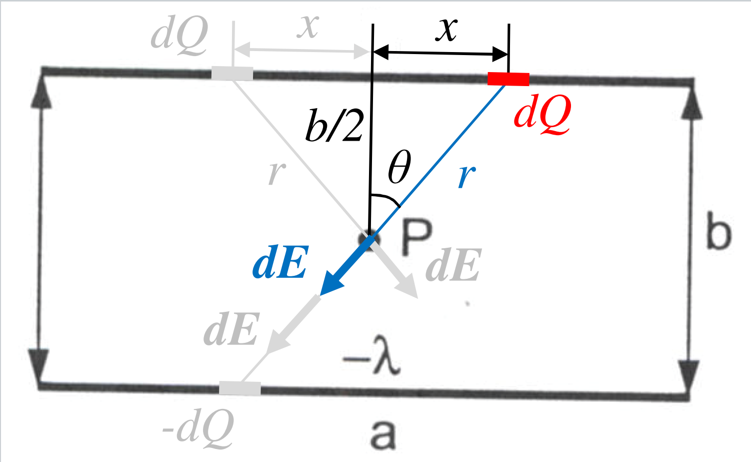
em que $\lambda = dQ/dx$, logo:

$$E_r = \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{b\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + b^2/4\right)^{3/2}} = \frac{b\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx}{\left(x^2 + b^2/4\right)^{3/2}}$$

Essa integral será resolvida usando o método que aplicamos para o disco circular:

Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 4



$$E_r = \frac{b\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{dx}{\left(x^2+b^2/4\right)^{3/2}} = \frac{b\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{b(\sec\alpha)^2\,d\alpha}{\left[b^2/4\,(\tan\alpha)^2+b^2/4\right]^{3/2}}$$

$$E_r = \frac{b\lambda}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{b(\sec\alpha)^2\,d\alpha}{b^3/8\left[(\tan\alpha)^2+1\right]^{3/2}}$$

$$E_r = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 b}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{(\sec\alpha)^2\,d\alpha}{\left[(\tan\alpha)^2+1\right]^{3/2}} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 b}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{(\sec\alpha)^2\,d\alpha}{(\sec\alpha)^3}$$

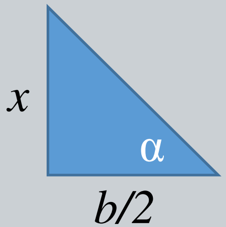
$$E_r = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 b}\int_{-a/2}^{+a/2}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\sin\alpha\Big|_{-a/2}^{+a/2}$$

$$E_r = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 b}\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2/4}}\Bigg|_{-a/2}^{+a/2} = \boxed{\frac{2a\lambda}{\pi\varepsilon_0 b\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Mudança de variável:

$$x = \frac{b}{2}\tan\alpha \quad \text{e} \quad dx = \frac{b}{2}(\sec\alpha)^2\,d\alpha$$

Para retomar a variável original, use o retângulo:



$\tan\alpha = 2x/b$

Resolução de problemas

LISTA 2, PROBLEMA 4 – Observação 1

A integração foi realizada de – *a/2* até + *a/2* porque a origem para a coordenada *x* em nosso diagrama foi definida no centro do fio.

Resolução de problemas
LISTA 2, PROBLEMA 4 – Observação 2

A função utilizada para calcular o campo elétrico resultante é par; assim, os limites de integração poderia ser redefinidos:

$$E_r = \frac{b\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{dx}{\left(x^2+b^2/4\right)^{3/2}} = 2\left(\frac{b\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\right)\int_{0}^{+a/2}\frac{dx}{\left(x^2+b^2/4\right)^{3/2}}$$

A componente horizontal resulta num função ímpar:

$$dE_y = 2dE\sin\theta = \frac{xdQ}{2\pi\varepsilon_0\left(x^2+b^2/4\right)^{3/2}} \quad \therefore \quad E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{xdx}{\left(x^2+b^2/4\right)^{3/2}}$$

que integrada com limites simétricos, sabemos que resulta em:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{+a/2}\frac{xdx}{\left(x^2+b^2/4\right)^{3/2}} = 0$$

Dúvidas?

diego.duarte@ufsc.br

Skype: diego_a_d

Encontrou algum erro nesta aula? Me informe via e-mail ;)

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA