Física 3 (EMB5043): Capacitores

MATERIAL DE APOIO PARA CURSO PRESENCIAL

Prof. Diego Alexandre Duarte

Universidade Federal de Santa Catarina | Centro Tecnológico de Joinville

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Sumário

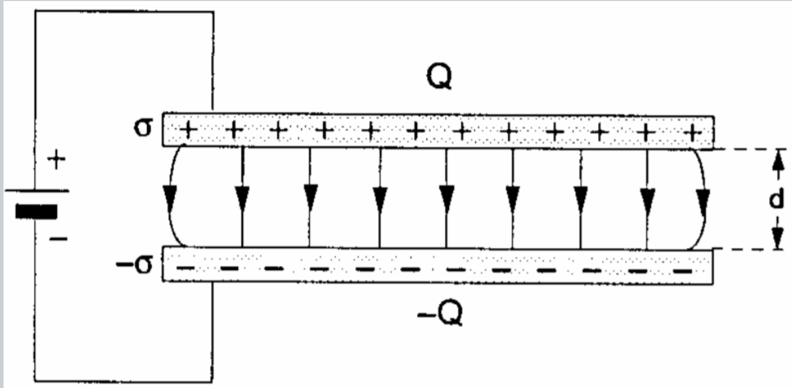
- Capacitância
- Cálculo da capacitância
- Capacitores em série e paralelo
- Energia armazenada em um campo elétrico
- Capacitor com um dielétrico
  - VISÃO ATÔMICA DE UM DIELÉTRICO
- Dielétricos e a lei de Gauss
- Resolução de problemas da lista 5

Material para estudos

- Capítulo 25 do Halliday volume 3 e capítulo 5 do Moysés volume 3.
- Estudar os problemas da Lista 5 que está disponível em diegoduarte.paginas.ufsc.br.

Capacitância

Considere duas placas separadas por uma distância pequena d, carregadas com ±Q e densidade superficial ±σ.



O campo elétrico entre as placas é:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Considerando a placa positiva como a origem, a variação de potencial é dada por:

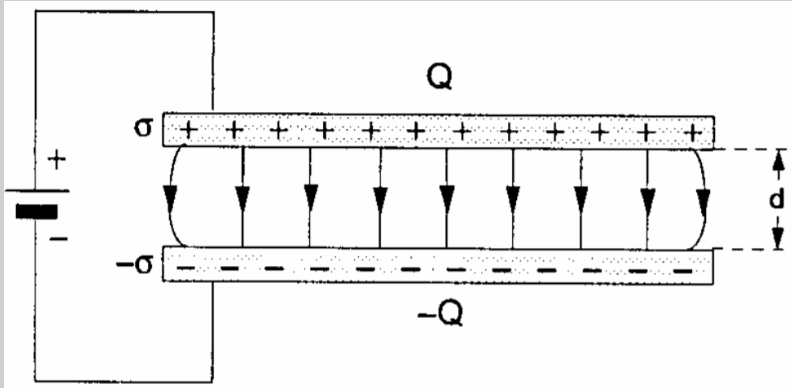
$$\Delta V = -\int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_d^0 E dr = -E \int_d^0 dr = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{qd}{\varepsilon_0 A}$$

indicando que a quantidade de carga em cada placa é proporcional a diferença de potencial entre as placas:

$$q = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \Delta V = CV$$ em que C é chamado de capacitância

Capacitor

COM GEOMETRIA PLANA



$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

coulomb/volt = farad (F)

<u>**Observações gerais**</u> **(independente da geometria)**:

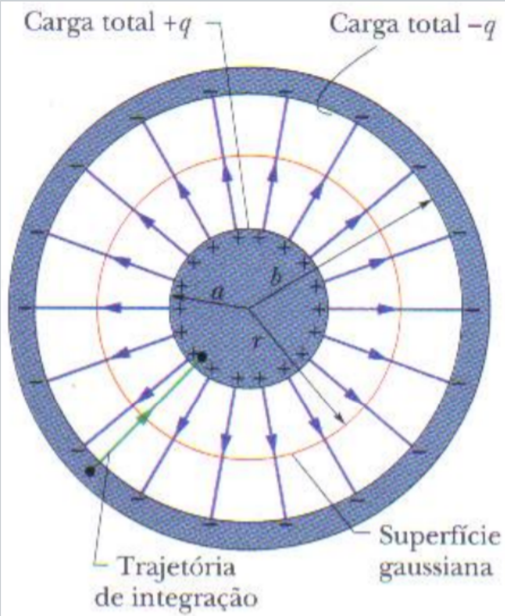
• A capacitância depende apenas de propriedades geométricas.

• Se a densidade superficial de carga é constante, o aumento da área causa o aumento de cargas.

• A capacitância é inversamente proporcional à distância dos corpos carregados.

Capacitor

COM GEOMETRIA CILÍNDRICA



A diferença de potencial é dada por:

$$\Delta V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{\rho} = -\int_b^a \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\rho}\right)\cdot d\vec{\rho}$$

$$\Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{d\rho}{\rho}(\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

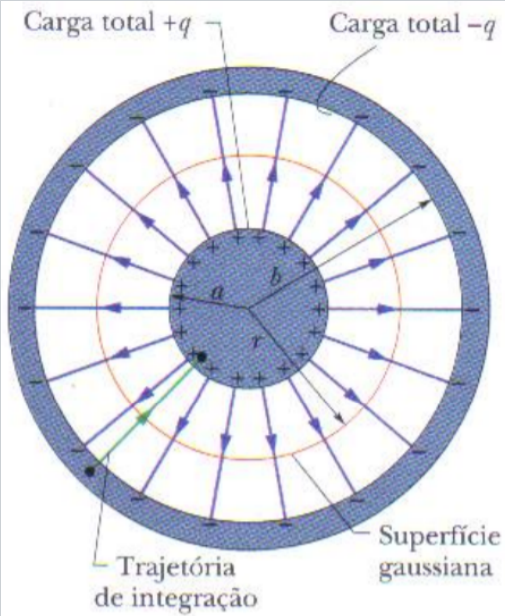
em que $\lambda = q/L$, com q representando a carga num condutor de comprimento L:

$$\Delta V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{ou} \quad q = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}}\Delta V$$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}}$$

Capacitância de um capacitor cilíndrico

Capacitor
COM GEOMETRIA ESFÉRICA



A diferença de potencial é dada por:

$$\Delta V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\right)\cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2}(\hat{r}\cdot\hat{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

em que q é a carga da esfera:

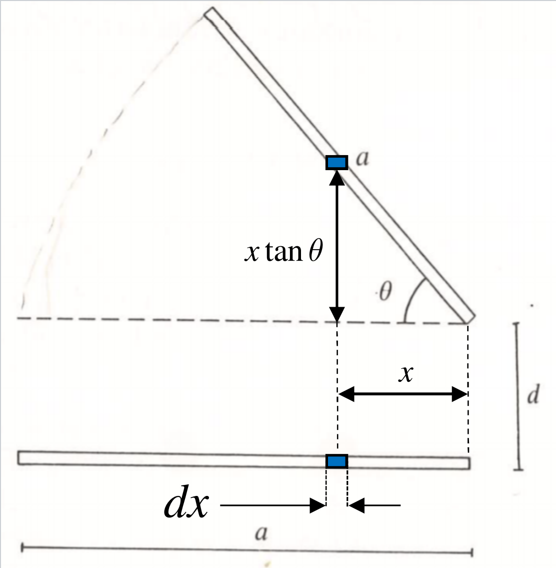
$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right) \quad \text{ou} \quad \boxed{q = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{(b-a)}\Delta V}$$

$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{(b-a)}}$$

Capacitância de um capacitor esférico

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 16



Podemos calcular a capacitância como uma soma de infinitos capacitores em paralelo da largura *dx*:

$$dC = \frac{\varepsilon_0 dA}{d} = \frac{\varepsilon_0 a dx}{d + \boxed{x\tan\theta}} \approx \frac{\varepsilon_0 a dx}{d + \boxed{x\theta}}$$

$\tan\theta \approx \theta$

$$dC = \frac{\varepsilon_0 a dx}{d\left(1+\dfrac{x\theta}{d}\right)} = \frac{\varepsilon_0 a dx}{d}\boxed{\left(1+\frac{x\theta}{d}\right)^{-1}} \approx \frac{\varepsilon_0 a}{d}\boxed{\left(1-\frac{x\theta}{d}\right)}dx$$

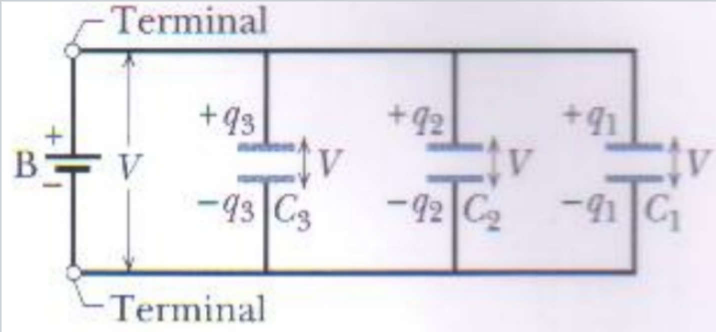
Série binomial

Para calcular a capacitância total, basta integrar a função entre 0 e *a*:

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{d}\int_0^a \left(1-\frac{x\theta}{d}\right)dx = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left(1-\frac{a\theta}{2d}\right)$$

Associação de capacitores

EM PARALELO



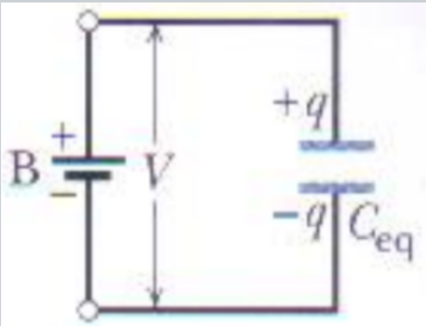
A quantidade total de carga gerada no três capacitores é:

$$q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$q = C_1V + C_2V + C_3V$$

$$C_{eq}V = C_1V + C_2V + C_3V$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3}$$

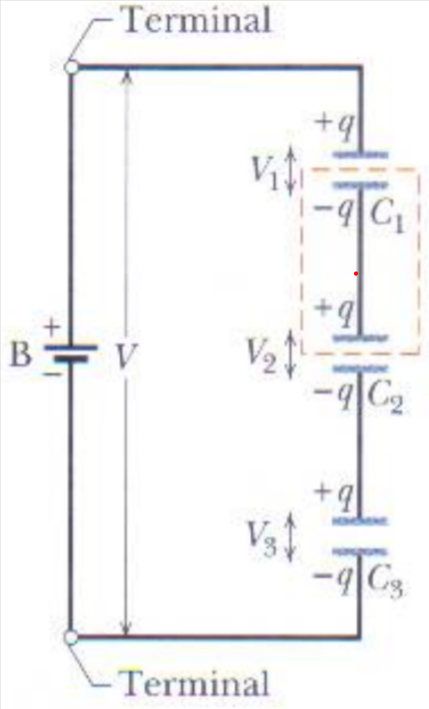


Para um circuito com *N* capacitores em paralelo:

$$\boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{N} C_i}$$

Associação de capacitores

EM SÉRIE

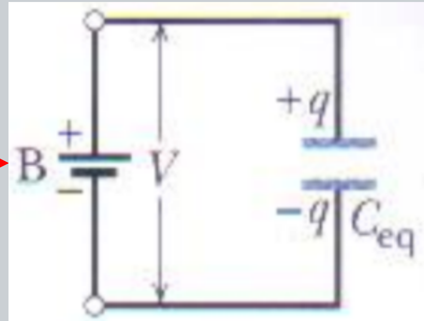


A diferença de potencial V entre os terminais da fonte é:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\frac{q}{C_{eq}} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} \quad \text{em que} \quad q = q_1 = q_2 = q_3 :$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

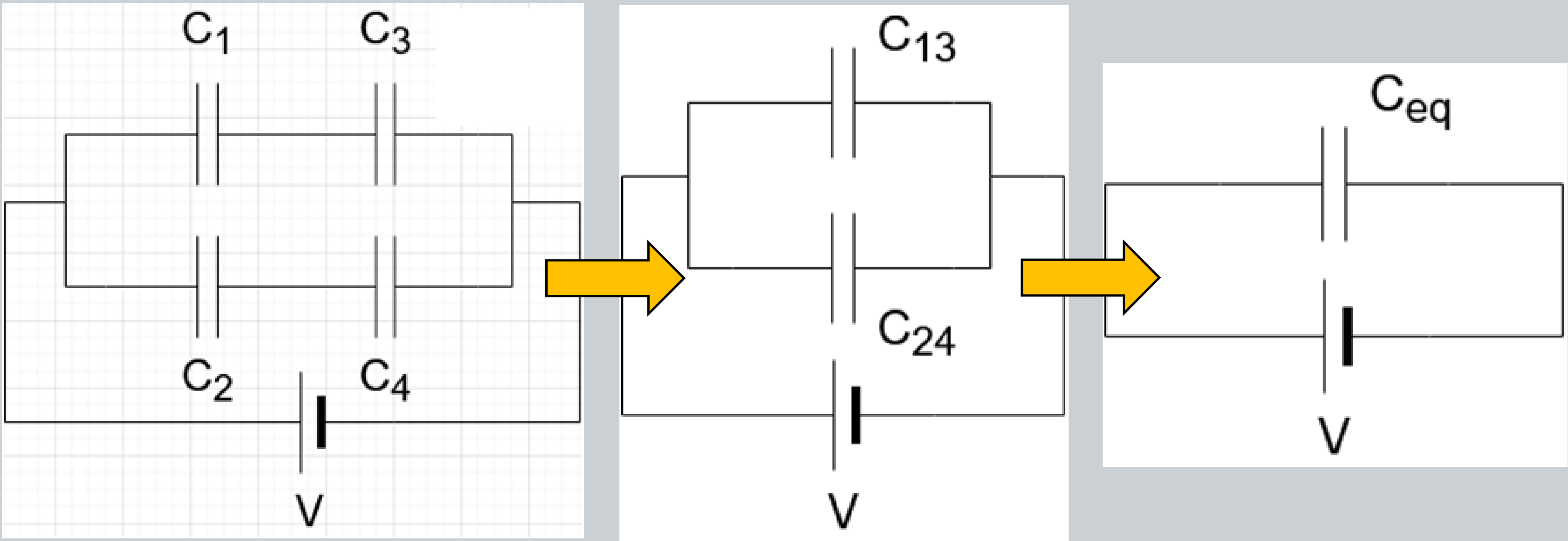


Para um circuito com N capacitores em série:

$$\boxed{C_{eq}^{\ -1} = \sum_{i=1}^{N} C_i^{\ -1}}$$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 1 - Itens (a)-(d)



$$\frac{1}{C_{13}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} \therefore C_{13} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3}$$

$$\frac{1}{C_{24}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} \therefore C_{24} = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4}$$

$$C_{eq} = C_{13} + C_{24} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4}$$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 1 - Itens (a)-(d)

$$C_{eq} = \frac{(1,0)(3,0)}{1,0+3,0} + \frac{(2,0)(4,0)}{2,0+4,0} = \frac{3}{4} + \frac{8}{6} = \frac{25}{12}\ \mu\text{F}$$

Com este valor é possível calcular a quantidade total de carga armazenada no capacitor equivalente:

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad \text{ou} \quad Q = C_{eq}V = \left(\frac{25}{12}\right)12 = \boxed{25\ \mu\text{C}}$$

No segundo circuito equivalente, os capacitores C_{13} e C_{24} estão em paralelo. Isso significa que as tensões em ambos os capacitores são iguais, *i.e.*, 12 V. Isso permite calcular a quantidade de carga em cada capacitor:

$$Q_{13} = C_{13}V = \left(\frac{3}{4}\right)12 = \boxed{9\ \mu\text{C}}$$

$$Q_{24} = C_{24}V = \left(\frac{8}{6}\right)12 = \boxed{16\ \mu\text{C}}$$

Princípio da conservação da carga

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 1 - Itens (a)-(d)

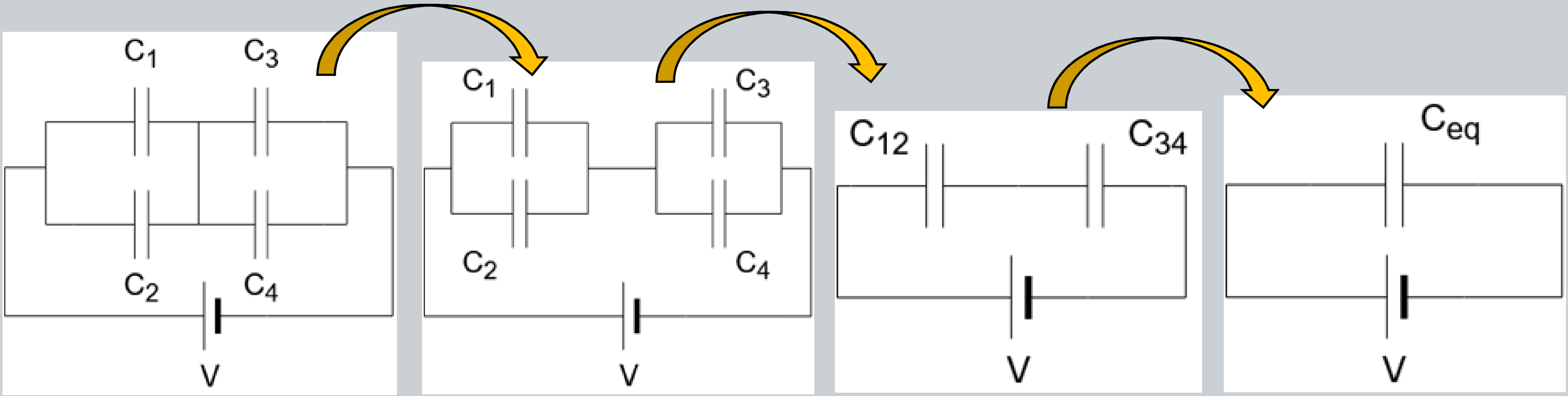
Considerando que o capacitor C_{13} é formado por dois capacitores em série, a carga Q_{13} é a mesma nos capacitores C_1 e C_3. O mesmo princípio é aplicado aos capacitores 2 e 4. Desta forma:

(a) $Q_1 = 9\ \mu\mathrm{C}$ (b) $Q_2 = 16\ \mu\mathrm{C}$ (c) $Q_3 = 9\ \mu\mathrm{C}$ (d) $Q_4 = 16\ \mu\mathrm{C}$

* **Deve ser tomado cuidado na análise da carga total, pois a metade da carga é induzida enquanto a outra metade foi gerada por meio do trabalho realizado pela fonte de 12 V. A carga efetivamente produzida pela fonte é 25 µC**.

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 1 - Itens (e)-(h)



$$C_{12} = C_1 + C_2 = 1,0 + 2,0 = 3,0\ \mu\text{F}$$

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 3,0 + 4,0 = 7,0\ \mu\text{F}$$

$$C_{eq} = \frac{C_{12}C_{34}}{C_{12} + C_{34}} = \frac{(3,0)(7,0)}{3,0 + 7,0} = 2,1\ \mu\text{F}$$

Esta capacitância equivalente gera uma carga total de $Q = C_{eq}V = (2,1)12 = 25,2\ \mu\text{C}$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 1 - Itens (e)-(h)

Considerando que os capacitores C_{12} e C_{34} estão em série, podemos concluir que cada um possui 25,2 μC de carga. Logo, é possível calcular a tensão em cada capacitor:

$$V_{12} = \frac{Q}{C_{12}} = \frac{25,2}{3} = 8,4 \text{ V} \quad \text{e} \quad V_{34} = \frac{Q}{C_{34}} = \frac{25,2}{7} = 3,6 \text{ V}$$

A tensão sobre o capacitor equivalente C_{12} é a tensão sobre os capacitores C_1 e C_2. O mesmo princípio é aplicado ao capacitor C_{34}. Assim, é possível calcular a carga em cada dispositivo:

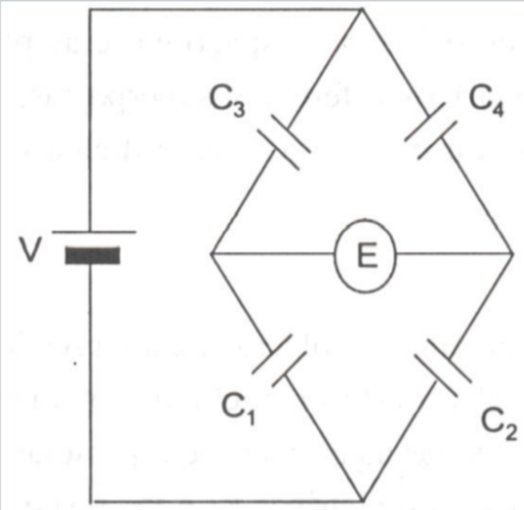
(e) $$Q_1 = C_1 V_{12} = (1,0)8,4 = 8,4 \ \mu\text{C}$$

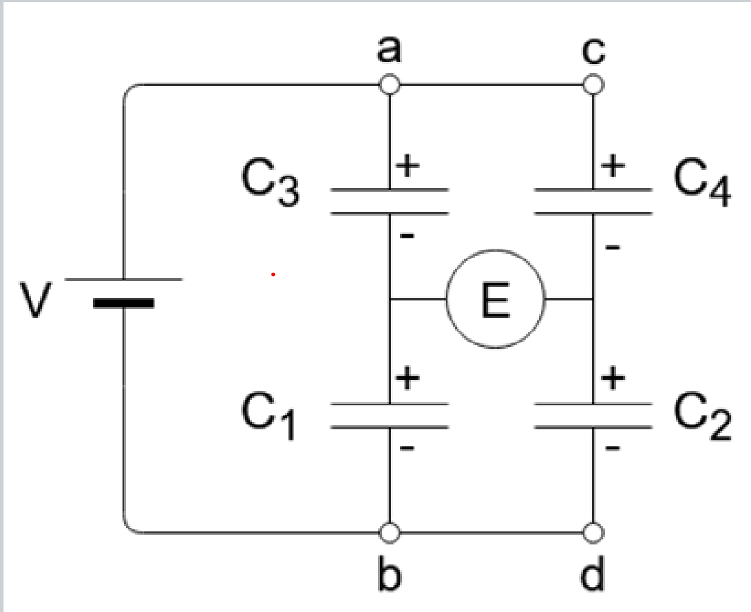
Similarmente,

(f) $Q_2 = 16,8 \ \mu\text{C}$ (g) $Q_3 = 10,8 \ \mu\text{C}$ (h) $Q_4 = 14,4 \ \mu\text{C}$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 4





Os capacitores 3 e 1 estão em paralelo com o capacitores 4 e 2. Desta forma, $V_{ab} = V_{cd}$:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = C_1V_1 \\ Q_2 = C_2V_2 \end{array}\right\} \frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2Q_1}{V_1Q_2}$$

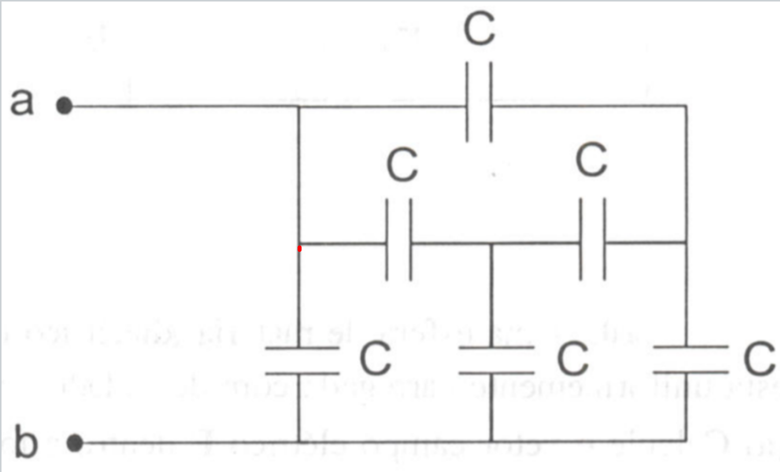
$$\left.\begin{array}{l} Q_3 = C_3V_3 \\ Q_4 = C_4V_4 \end{array}\right\} \frac{C_3}{C_4} = \frac{V_4Q_3}{V_3Q_4}$$

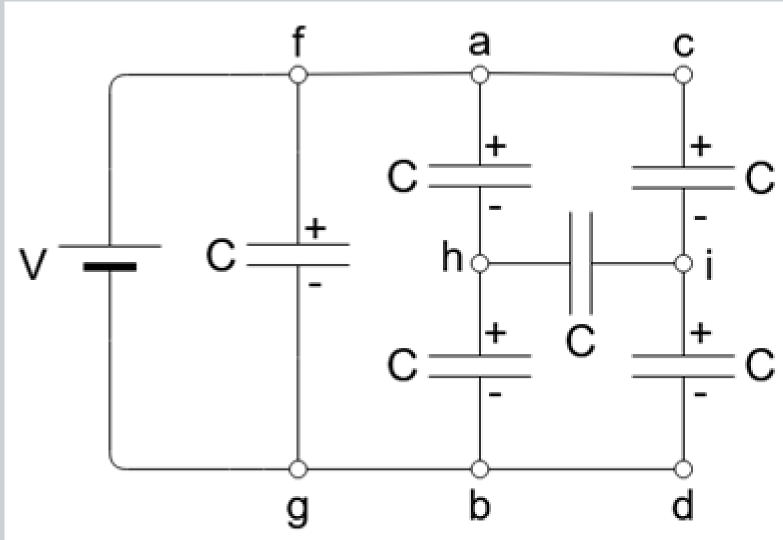
Quando a leitura no eletrômero é **zero**, as cargas e potenciais, entre os dois lados, são iguais. Logo:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}$$

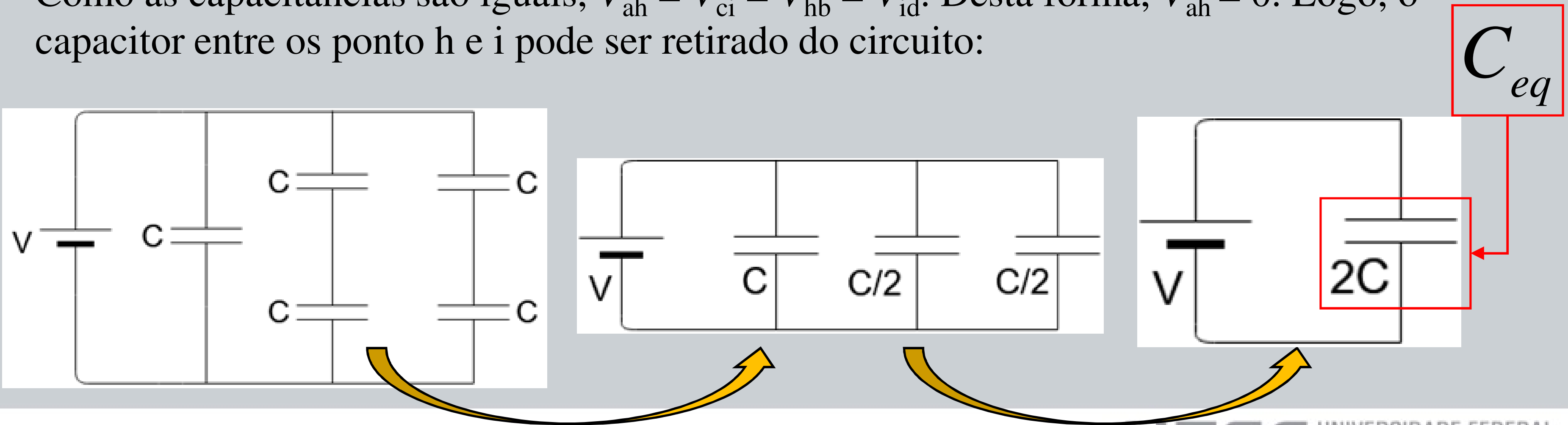
Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 5





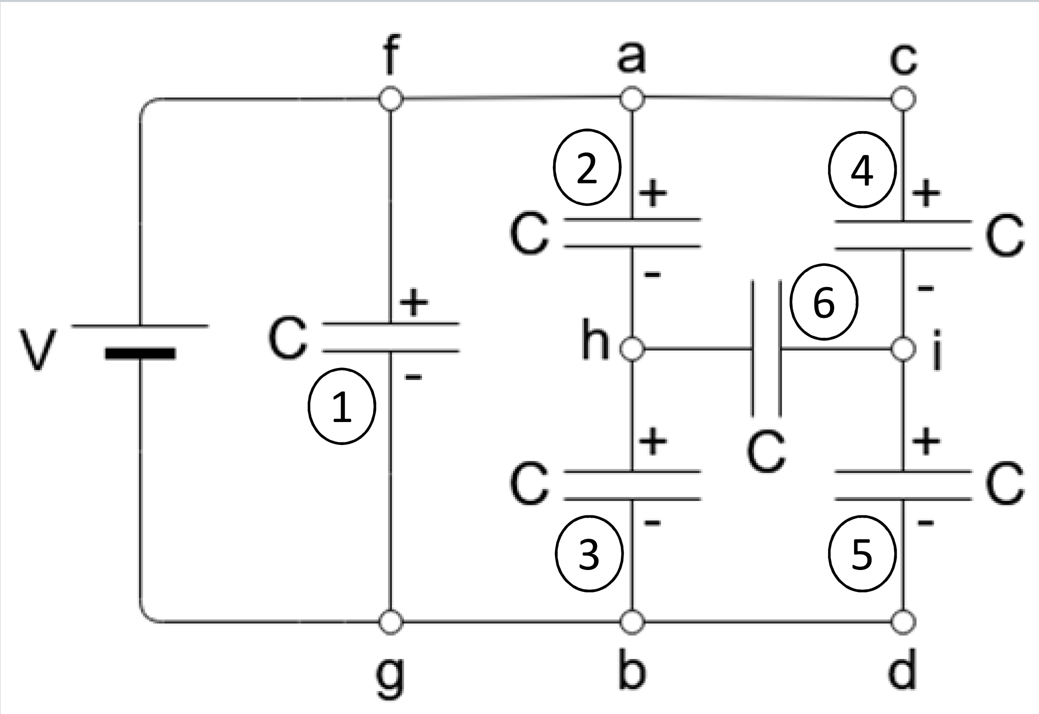
Como as capacitâncias são iguais, $V_{ah} = V_{ci} = V_{hb} = V_{id}$. Desta forma, $V_{ah} = 0$. Logo, o capacitor entre os ponto h e i pode ser retirado do circuito:



Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 5 – RESOLUÇÃO ALTERNATIVA

O terminal positivo realiza trabalho apenas sobre os elétrons das placas superiores dos capacitores 1, 2 e 4. As cargas nos demais capacitores surgem por indução. Assim, a carga total é dada por $Q_1 + Q_2 + Q_4 = CV_1 + CV_2 + CV_4 = Q_T$. Com a carga total, podemos calcular a capacitância equivalente como $C_{eq} = Q_T/V$.



Logo, precisamos calcular Q_T em função da tensão V para obter C_{eq}. Analisando o circuito, obtemos:

$$\left.\begin{aligned} V - V_1 &= 0 \\ V - V_2 - V_3 &= 0 \\ V - V_4 - V_5 &= 0 \\ V - V_2 + V_6 - V_5 &= 0 \end{aligned}\right\}\ \textbf{Conservação de energia}$$

$$\left.\begin{aligned} -Q_4 + Q_6 + Q_5 &= 0 \\ -Q_2 + Q_3 - Q_6 &= 0 \end{aligned}\right\}\ \textbf{Conservação de carga}$$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 5 – RESOLUÇÃO ALTERNATIVA

Reescrevendo as equações e substituindo $Q = CV$ na conservação de carga, obtemos:

$$\begin{aligned}
V_1 &= V \\
V_2 + V_3 &= V \\
V_4 + V_5 &= V \\
V_2 + V_5 - V_6 &= V \\
-CV_4 + CV_6 + CV_5 &= 0 \\
-CV_2 + CV_3 - CV_6 &= 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
V_1 &= V \\
V_2 + V_3 &= V \\
V_4 + V_5 &= V \\
V_2 + V_5 - V_6 &= V \\
-V_4 + V_5 + V_6 &= 0 \\
-V_2 + V_3 - V_6 &= 0
\end{aligned}$$

que pode ser resolvido pela aplicação parcial do método de Gauss-Jordan:

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 5 – RESOLUÇÃO ALTERNATIVA

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 = L_4 - L_2 \\ \\ L_6 = L_6 + L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ L_6 = L_6 + 2L_4 \end{array}$$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 5 – RESOLUÇÃO ALTERNATIVA

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} L_4 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} L_5 = L_5 + L_4$$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 5 – RESOLUÇÃO ALTERNATIVA

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} L_6 = L_6 - L_5$$

Valores para calcular a quantidade efetiva de carga produzida no circuito

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} & V_1 = V \\ & V_2 + V_3 = V \\ & -V_3 + V_5 - V_6 = 0 \\ & V_4 + V_5 = V \\ & 2V_5 + V_6 = V \\ & -4V_6 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} & \boxed{\begin{aligned} & V_1 = V \\ & V_2 = V/2 \end{aligned}} \\ & V_3 = V/2 \\ & \boxed{V_4 = V/2} \\ & V_5 = V/2 \\ & V_6 = 0 \end{aligned}$$

Resolução de problemas

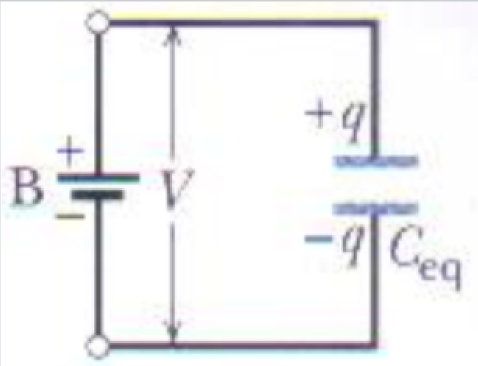
LISTA 5, PROBLEMA 5 – RESOLUÇÃO ALTERNATIVA

Com os valores das tensões V_1, V_2 e V_4 em função de V, podemos calcular a capacitância equivalente:

$$C_{eq} = \frac{Q_T}{V} = \frac{CV_1 + CV_2 + CV_4}{V} = \frac{CV + {CV}/{2} + {CV}/{2}}{V} = 2C$$

Energia em capacitores

Considere um capacitor com uma carga q. O trabalho necessário para que a fonte carregue o capacitor com $q+dq$ é dado por:



$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq = \frac{1}{C}qdq$$

Para calcular o trabalho total que a fonte necessita para carregar o capacitor com uma carga total Q basta integrar a função acima:

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \qquad (1)$$

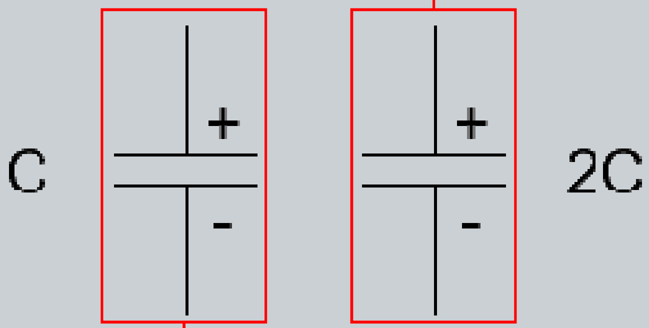
O trabalho realizado pela fonte é a energia potencial elétrica armazenada pelas cargas do capacitor. Para um capacitor plano, a equação (1) é dada por:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 Ad\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \underbrace{(Ad)}_{Volume}E^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{U}{V} = u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

indicando que a energia está armazenada no campo elétrico.

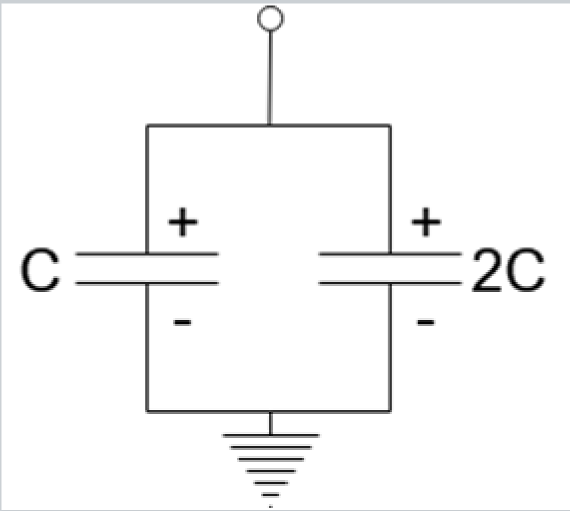
Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 2 – Itens (a) e (b)



A energia total armazenada é dada por:

$$U = \boxed{\frac{Q^2}{2C}} + \boxed{\frac{Q^2}{4C}} = \frac{3Q^2}{4C} \qquad (2)$$

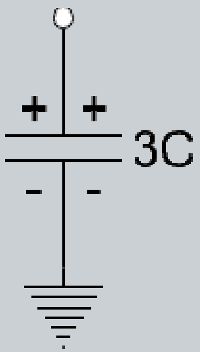


Na união dos terminais, conforme descrito no enunciado, os dois capacitores estão em paralelo, o que permite determinar a capacitância equivalente como $C_{eq} = C + 2C = 3C$.

Ao conectar os terminais negativos ao terra, as cargas negativas devem ser neutralizadas; entretanto, as cargas positivas foram conservadas, pois estão em um **terminal flutuante**. Assim, as cargas negativas são mantidas nos terminais inferiores por indução. Logo, a carga total do circuito é $2Q$.

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 2 – Itens (a) e (b)



Com essas informações, podemos calcular a diferença de potencial entre as placas:

(a) $$V = \frac{Q}{C} = \frac{2Q}{3C}$$

A energia total armazenada no circuito é dada por:

$$U = \frac{(2Q)^2}{2(3C)} = \frac{4Q^2}{6C} = \frac{2Q^2}{3C} \qquad (3)$$

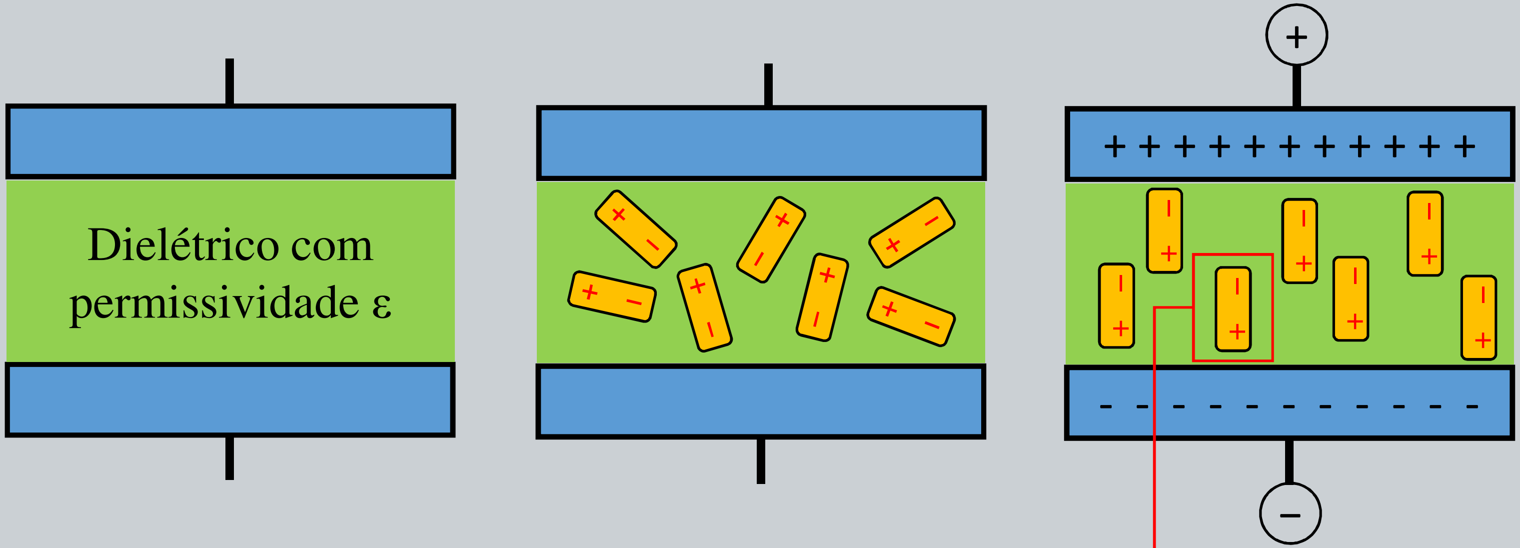
Para obter a variação de energia entre os dois circuitos, basta subtrair as equações (3) e (2):

(b) $$\Delta U = \frac{2Q^2}{3C} - \frac{3Q^2}{4C} = -\frac{Q^2}{12C}$$

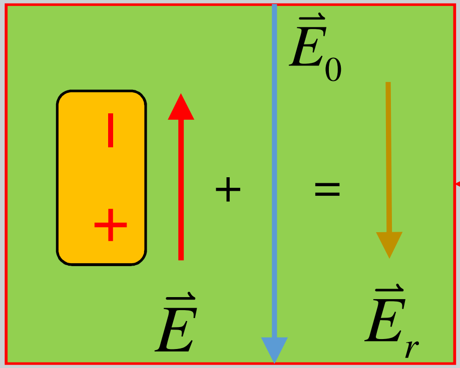
Por que a energia reduziu?

Capacitores com dielétricos

Considere um capacitor preenchido com um meio material.



A incorporação de um dielétrico entre as placas do capacitor reduz o campo elétrico total



Capacitores com dielétricos

Se o capacitor está ligado numa bateria, a d.d.p. é constante. Assim, a equação $V = E_r d$ indica que o dielétrico promove alterações no campo elétrico do dispositivo:

Campo elétrico resultante do capacitor com dielétrico

$$V = \boxed{\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)} d = \left(\frac{\boxed{\sigma}}{\kappa\varepsilon_0}\right) d = \frac{\sigma d}{\kappa\varepsilon_0}$$

Densidade superficial de carga das placas

em que σ é a densidade superficial de carga das placas, ε é a permissividade elétrica do meio e κ ≥ 1 é a constante dielétrica do material. No vácuo, κ = 1 e para meios materiais, κ > 1. Como a distância de separação das placas é constante, o aumento de κ deve ser balanceado pelo aumento da densidade de carga σ para que o potencial elétrico se mantenha constante. Desta forma, **o dielétrico aumenta a capacitância**:

$$q = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d} V \quad \text{ou} \quad C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

e a mesma adaptação pode ser realizada para as capacitâncias previamente calculadas.

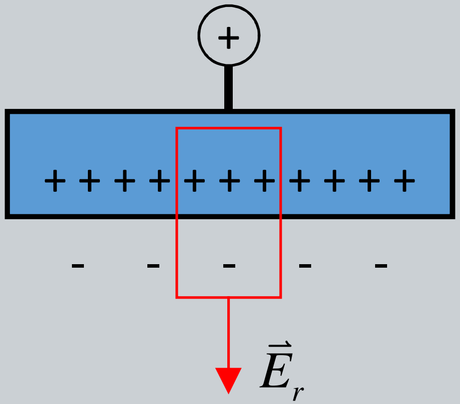
Meio	κ
ar (em 1 atm)	1,00054
TiO_2	80-100
HfO_2	25

Capacitores com dielétricos

LEI DE GAUSS

Podemos calcular o campo elétrico resultante de duas formas:

(i) considerar uma distribuição espacial de carga –*q’* no vácuo nas proximidades da placa positiva, que representa a carga induzida no dielétrico. Neste caso, a lei de Gauss fica escrita como:



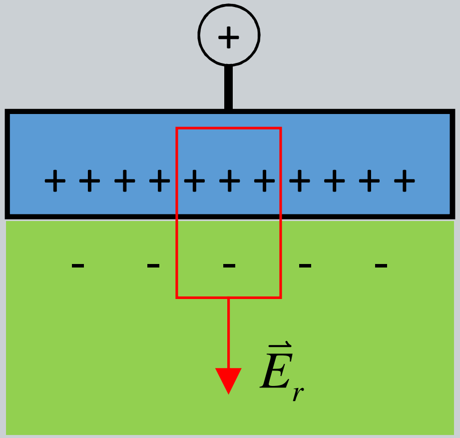
$$\int \vec{E}_r \cdot d\vec{A} = \frac{q - q'}{\varepsilon_0} \quad \text{que fornece} \quad E_r = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 A} \qquad (4)$$

em que +*q* representa a carga da placa. Este resultado mostra que o campo elétrico resultante foi reduzido devido a presença da carga induzida –*q’*.

Capacitores com dielétricos

LEI DE GAUSS

(ii) considerar uma distribuição de carga $+q$ nas placas e a informação da carga induzida na constante dielétrica do meio material:



$$\int \vec{E}_r \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon} \quad \text{que fornece} \quad E_r = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0 A} \qquad (5)$$

que é o mesmo procedimento que usamos na análise do capacitor plano com dielétrico. Igualando as equações (4) e (5), obtemos:

$$q' = q\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right) \qquad (6)$$

mostrando que $q' = 0$ para $\kappa = 1$, *i.e.*, não existe carga induzida no ar. Além disso, a carga induzida se aproxima da carga da placa a medida que κ aumenta. Quando $\kappa >> 1$, obtemos $q' \approx q$. Este resultado mostra pela equação (4) que o campo elétrico resultante no dielétrico seria aproximadamente nulo. Substituindo a equação (6) na (4):

Capacitores com dielétricos

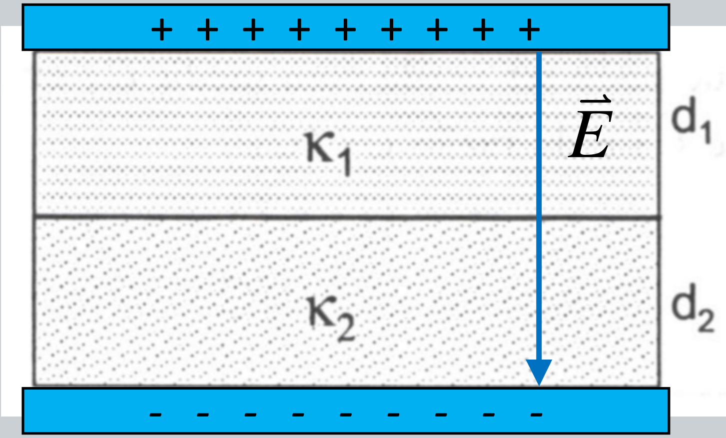
LEI DE GAUSS

...obtemos a lei de Gauss na forma integral em meios dielétricos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0}$$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 9



A capacitância pode ser calculada por:

$$\Delta V = -\int_{d_1+d_2}^{0} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\Delta V = -\int_{d_1+d_2}^{d_1} \vec{E}_2\cdot d\vec{r} - \int_{d_1}^{0} \vec{E}_1\cdot d\vec{r}$$

em que E_1 e E_2 representam os campos dentro dos dielétricos κ_1 e κ_2, respectivamente:

$$\Delta V = -\int_{d_2+d_1}^{d_1} \frac{\sigma}{\kappa_2\varepsilon_0} dr - \int_{d_1}^{0} \frac{\sigma}{\kappa_1\varepsilon_0} dr = -\frac{\sigma}{\kappa_2\varepsilon_0}\left[d_1 - \left(d_2 + d_1\right)\right] - \frac{\sigma}{\kappa_1\varepsilon_0}\left(0 - d_1\right)$$

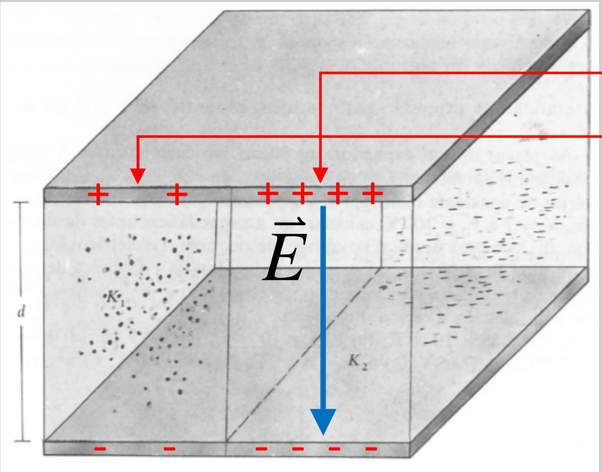
$$\Delta V = \frac{\sigma d_2}{\kappa_2\varepsilon_0} + \frac{\sigma d_1}{\kappa_1\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0 A}\left(\frac{d_1\kappa_2 + d_2\kappa_1}{\kappa_1\kappa_2}\right) \therefore \boxed{C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A\kappa_1\kappa_2}{d_1\kappa_2 + d_2\kappa_1}}$$

A área de cima da placa é igual a área do dielétrico

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 10

Como a placa está em contato com dois dielétricos e a d.d.p. entre as placas é a mesma, haverá diferentes concentrações de carga elétrica, de modo que a soma representa a carga total:



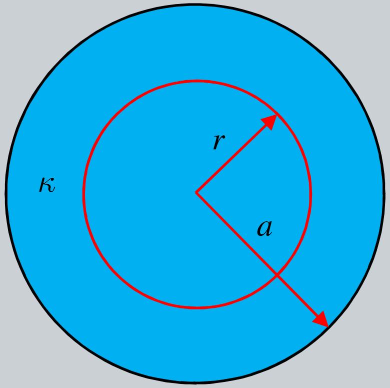
$$Q = \boxed{Q_1} + \boxed{Q_2} = C_1 V + C_2 V = \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 S_1}{d} V + \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 S_2}{d} V$$

em que $S_1 = S_2 = S/2$:

$$Q = \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 S}{2d} V + \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 S}{2d} V = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}(\kappa_1 + \kappa_2) V \therefore C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 11 – Item (a)



O campo elétrico dentro da esfera é determinado pela lei de Gauss para meios dielétricos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0}$$

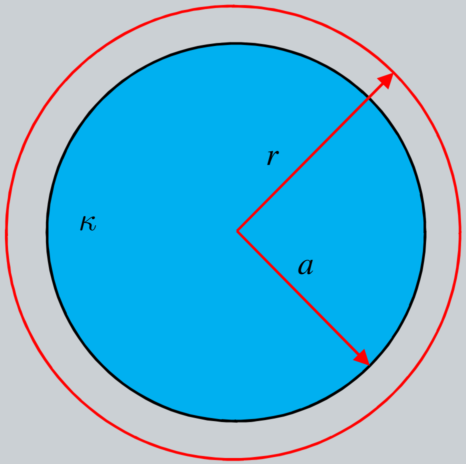
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E dA = E \int dA = EA = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0} \therefore E = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0 A}$$

em que: $q = \dfrac{4\pi r^3 \rho}{3}$ logo:

$$E = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0 A} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\kappa \varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\kappa \varepsilon_0} \therefore \vec{E} = \frac{\rho r}{3\kappa \varepsilon_0}\hat{r} \qquad (7)$$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 11 – Item (a)



O campo elétrico fora da esfera é determinado pela lei de Gauss definida no vácuo:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

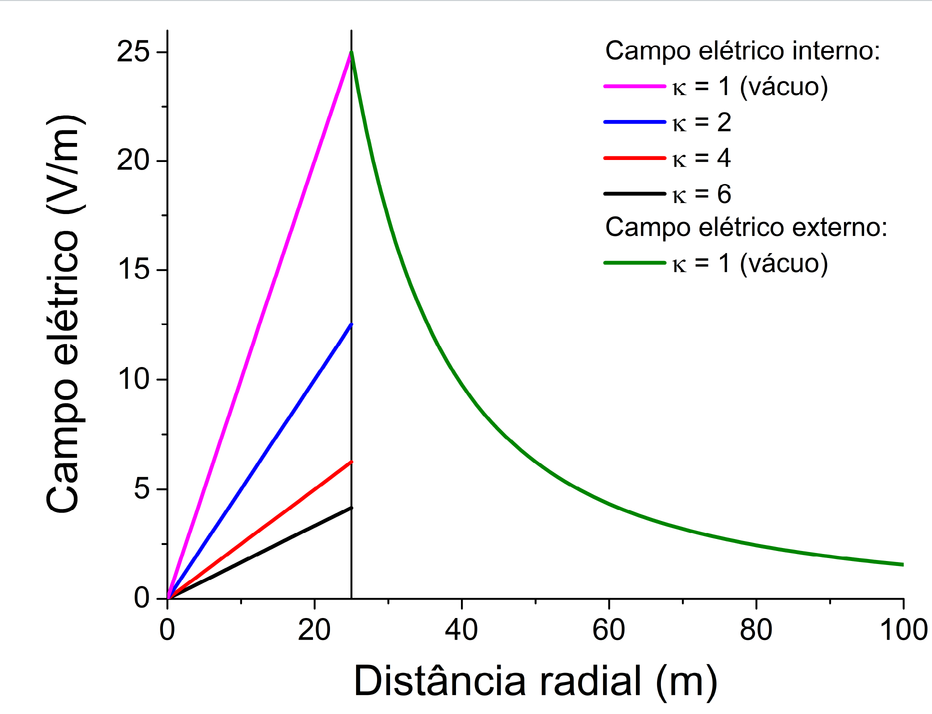
$$\int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E dA = E\int dA = EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \therefore E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

em que: $q = \dfrac{4\pi a^3 \rho}{3}$ logo:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \frac{4\pi a^3\rho}{3\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} \therefore \vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad (8)$$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 11 – Item (a)



$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\kappa\varepsilon_0}\hat{r} \text{ para } 0 \leq r < a \\[2ex] \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \text{ para } r > a \end{cases}$$

Condições utilizadas para construção do gráfico:

$$\frac{\rho}{3\varepsilon_0} = 1 \ \frac{\text{V}}{\text{m}^2} \ \text{ e } a = 25 \text{ m}$$

Resolução de problemas

LISTA 5, PROBLEMA 11 – Item (b)

O cálculo do potencial é obtido diretamente pela integração do campo elétrico:

$$\Delta V = -\int_a^0 \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_a^0 E dr = -\int_a^0 \left(\frac{\rho r}{3\kappa\varepsilon_0}\right) dr$$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{3\kappa\varepsilon_0}\int_a^0 r dr = -\frac{\rho}{6\kappa\varepsilon_0}\left(0 - a^2\right)$$

$$V(0) - V(a) = \frac{\rho a^2}{6\kappa\varepsilon_0}$$

Dúvidas?

diego.duarte@ufsc.br

Skype: diego_a_d

Encontrou algum erro nesta aula? Me informe via e-mail ;)

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA