# Física 3 (EMB5043): Circuitos

## MATERIAL DE APOIO PARA CURSO PRESENCIAL

Prof. Diego Alexandre Duarte
Universidade Federal de Santa Catarina | Centro Tecnológico de Joinville

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

# Sumário

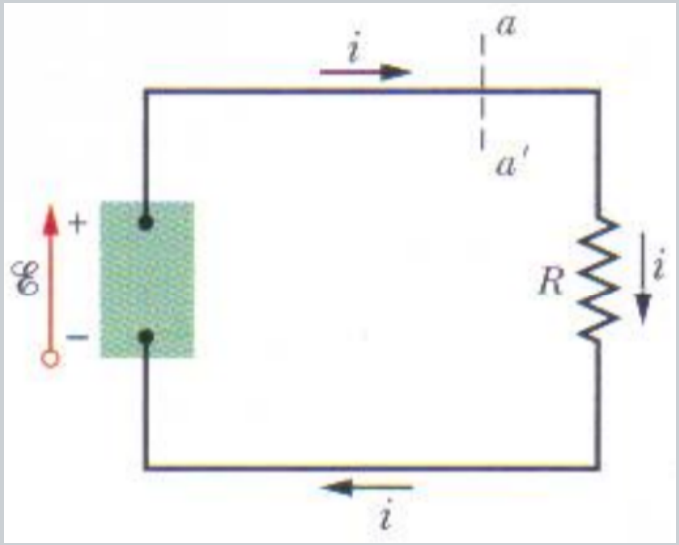
- Força eletromotriz
  - Sentido da corrente elétrica
- Lei das tensões de Kirchhoff
- Resistores em série
- d.d.p. em caminho aberto
- Aterramento
- Lei dos nós de Kirchhoff
- Resistores em paralelo
- Amperímetro e voltímetro
- Circuitos RC
  - Carregamento do capacitor
  - Descarregamento do capacitor
- Resolução de problemas da Lista 7

# Material para estudos

- Capítulo 27 do Halliday volume 3 e capítulos 6 e10 do Moysés volume 3.
- Estudar os problemas da Lista 7 que está disponível em diegoduarte.paginas.ufsc.br.

# Força eletromotriz

A figura mostra uma bateria com d.d.p. $\xi$ conectada em um resistor de resistência $R$. Uma corrente $i$ atravessa uma seção $aa'$.




A d.d.p. $\xi$ é chamada de "força eletromotriz" ou apenas "fem", porém não representa uma força e sim uma diferença de potencial responsável pela realização de trabalho sobre as cargas que constituem a corrente elétrica:

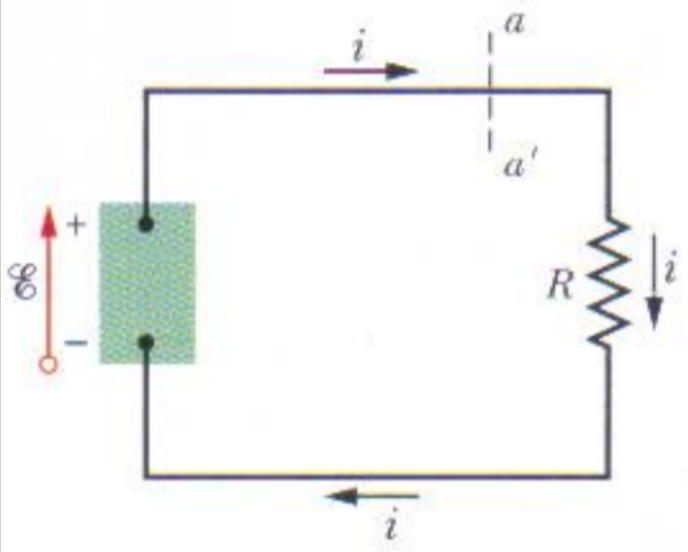
$$\xi = \frac{dW}{dq}$$

A fonte responsável pela geração da corrente elétrica pode ser **ideal** ou **real**. Fontes ideais aplicam uma d.d.p. igual a força eletromotriz e fontes reais aplicam uma d.d.p. menor que força eletromotriz devido a perda de energia dentro da fonte.

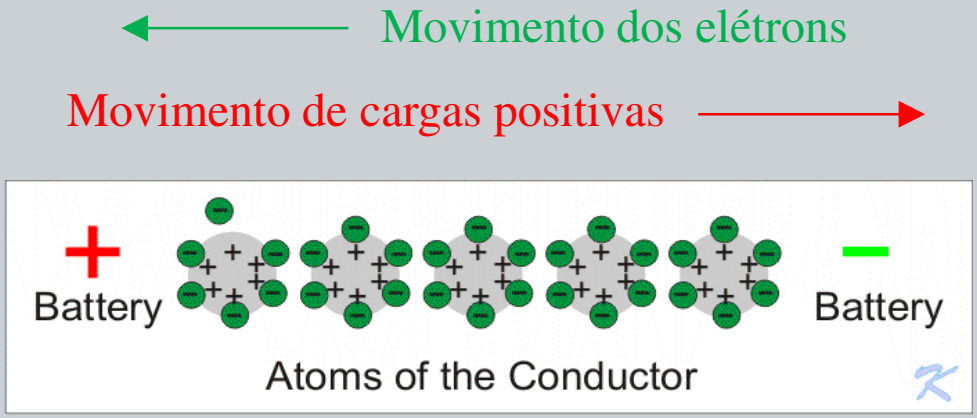
# Força eletromotriz

## SENTIDO DA CORRENTE ELÉTRICA

A corrente elétrica é formada pela corrente de elétrons; entretanto, por convenção, a corrente elétrica $i$ é atribuída ao movimento de cargas positivas. Desta forma, a corrente sai do terminal positivo e vai em direção ao terminal negativo.




$$\xi - Ri = 0 \quad \therefore \quad \xi = Ri$$

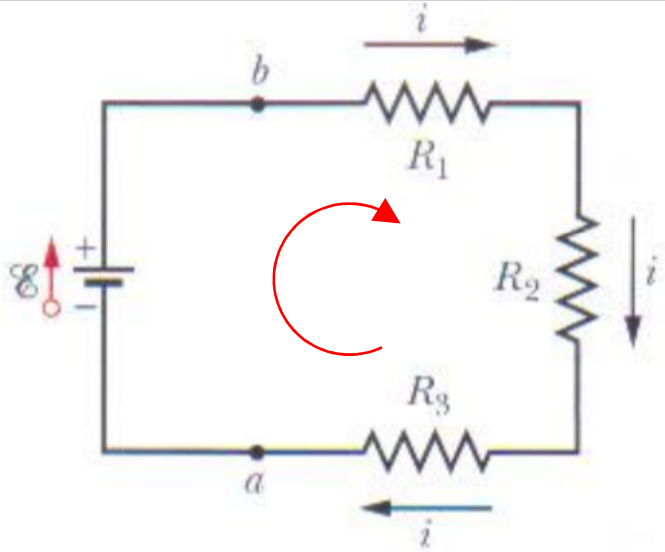



https://www.douglaskrantz.com/ElecElectricalFlow.html

Após a corrente passar pelo resistor, há uma "queda de tensão", pois as cargas positivas vão de um potencial mais positivo para um menos positivo (ou mais negativo).

# Lei das tensões de Kirchhoff

A lei das tensões de Kirchhoff estabelece que *a soma das tensões ao longo de uma malha (caminho fechado) é sempre igual a zero*.




• Ao atravessarmos a fonte do terminal – para o terminal +, a d.d.p. é +ξ e ao analisarmos do terminal + para o terminal –, a d.d.p. é –ξ.

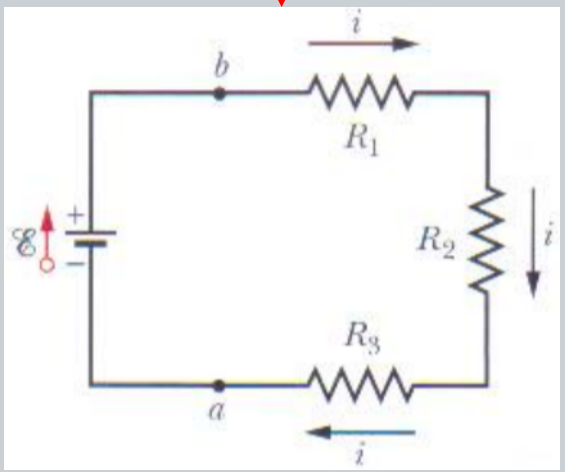
• Ao atravessarmos uma resistência no sentido da corrente, haverá uma queda de tensão $-Ri$ sobre o resistor e ao atravessarmos no sentido oposto ao da corrente, haverá um aumento $+Ri$.

Assumindo estas condições, temos a seguinte equação ao analisarmos a malha no **sentido horário**:

$$\xi - R_1 i - R_2 i - R_3 i = 0 \qquad (1)$$

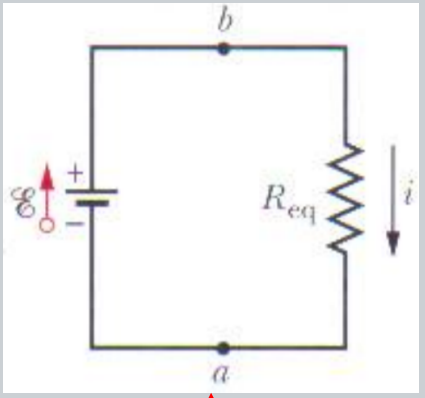
# Resistores em série

A partir da equação (1) podemos determinar a resistência equivalente do circuito:




$$\xi = R_1 i + R_2 i + R_3 i$$

$$i = \frac{\xi}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{\xi}{R_{eq}}$$

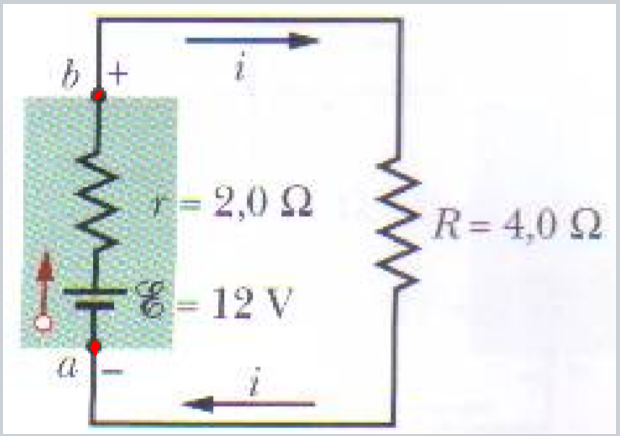



em que $R_{eq}$ representa a resistência equivalente do circuito. Desta forma, para um circuito com $N$ resistores, a resistência equivalente é dada por:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i \qquad (2)$$

# d.d.p. em caminho aberto

Aplicando a lei das tensões, podemos determinar a d.d.p. entre os pontos *b* e *a*:




$$V_b - V_a = Ri = \xi - ri \qquad (3)$$

$$\xi = Ri + ri$$

$$i = \frac{\xi}{R + r} = \frac{\xi}{R_{eq}}$$

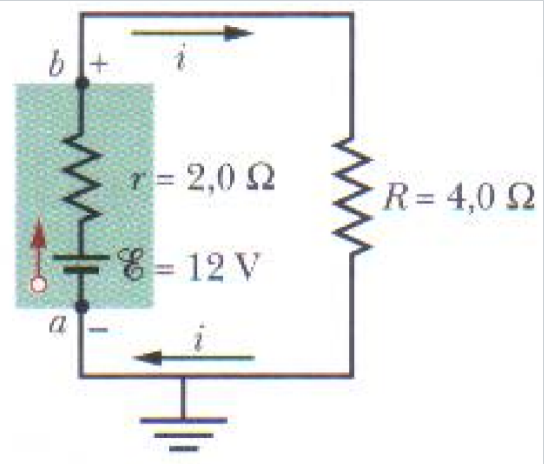
Resistência interna da fonte

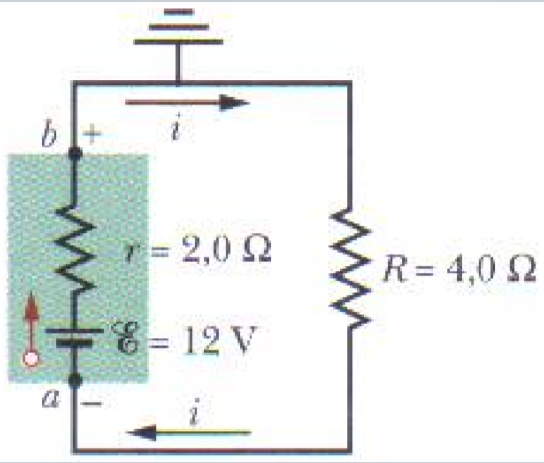
Assumindo $\xi = 12$ V, $R = 4{,}0\ \Omega$ e $r = 2{,}0\ \Omega$, obtemos $i = 2{,}0$ A. Isso implica que $V_b - V_a = 8{,}0$ V é a d.d.p. **real** da fonte. Para determinar a d.d.p. entre dois pontos *b* e *a* quaisquer, basta aplicar a equação:

(4) $$V_a = V_b - \sum_{i=1}^{N} V_i$$

em que *b* é o ponto inicial, *a* o ponto final, *N* é o número de dispositivos analisados e $V_i$ é a *i*-ésima queda de tensão ao logo do caminho percorrido no circuito com $V_b > V_a$.

# Aterramento




O aterramento de um terminal faz com que ele adquira potencial **zero** devido a neutralização das cargas no terminal. Isso acontece porque o terminal é conectado à terra, que é um solo úmido e um bom condutor de eletricidade. Com o terminal negativo aterrado $V_a = 0$ e a equação (3) mostra que:

$$V_b - V_a = V_b - 0 = 8{,}0\ \text{V} \quad \therefore \quad V_b = 8{,}0\ \text{V}$$

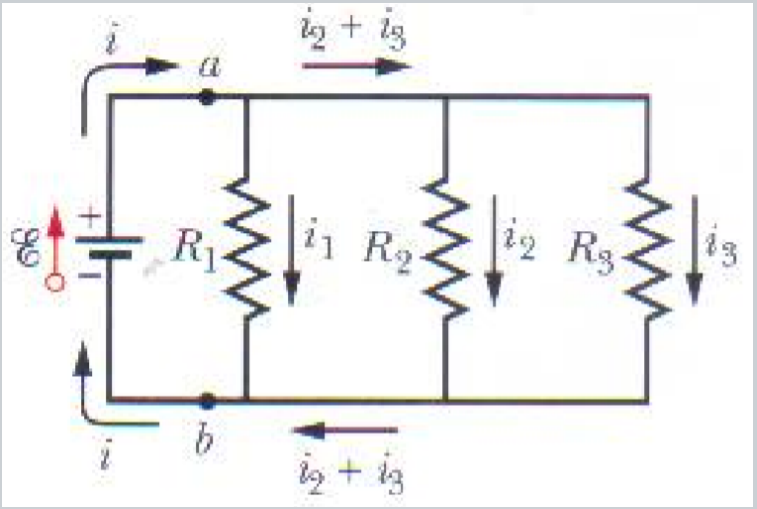
Com o terminal positivo aterrado $V_b = 0$ e a equação (3) mostra que:

$$V_b - V_a = 0 - V_a = 8{,}0\ \text{V} \quad \therefore \quad V_a = -8{,}0\ \text{V}$$

Em diversas situações, um circuito elétrico pode apresentar cargas elétricas estáticas em sua estrutura e, por isso, o aterramento deve ser realizado como um mecanismo de proteção para evitar “choques”.

# Lei dos nós de Kirchhoff

A lei dos nós (ou lei das correntes) de Kirchhoff estabelece que *a soma das correntes que entram no nó é igual a soma das correntes que saem do nó*.




• A lei dos nós de Kirchhoff é aplicada quando existe mais de uma malha no circuito.

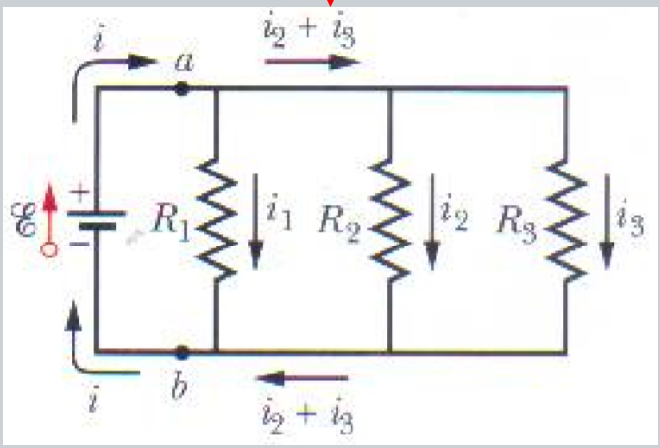
• Quando o circuito é composto por mais de uma malha, os resistores podem estar em paralelo. Neste caso, a d.d.p. sobre cada resistor é a mesma, conforme discutido na aula sobre capacitores.

A lei dos nós obedece o princípio da conservação da carga elétrica:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \qquad (5)$$

# Resistores em paralelo

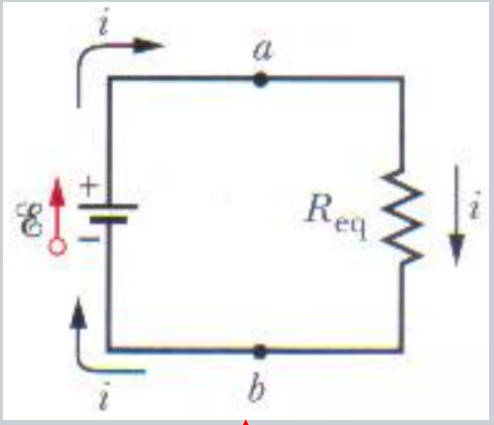
A partir da equação (5) podemos determinar a resistência equivalente do circuito:




$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

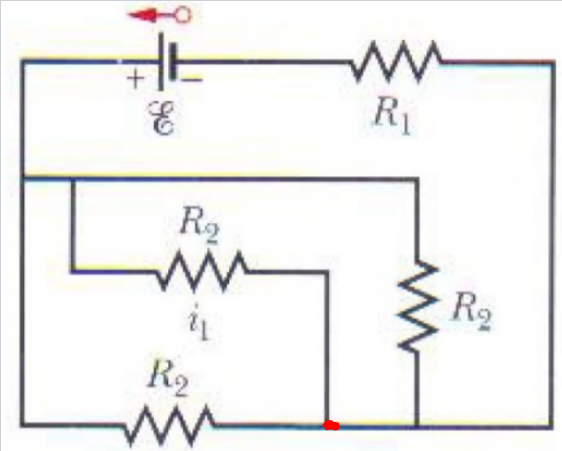


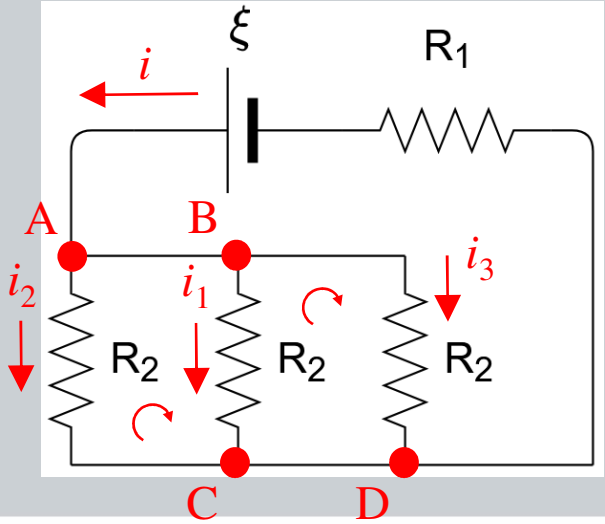

em que $R_{eq}$ representa a resistência equivalente do circuito. Desta forma, para um circuito com $N$ resistores, a resistência equivalente é dada por:

$$R_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^{N} R_i^{-1} \qquad (6)$$

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 3 – Itens (a)-(c)




A fonte produz uma corrente $i$ que ramifica nas correntes $i_1$, $i_2$ e $i_3$ a partir do nó A. Aplicando a lei das tensões no sentido horário nas malhas ABCA e BDCB:

$$-R_2 i_1 + R_2 i_2 = 0$$
$$-R_2 i_3 + R_2 i_1 = 0$$

podemos provar que $i_1 = i_2 = i_3$. Além disso, estes três resistores estão em paralelo e a resistência equivalente é dada pela equação (6):

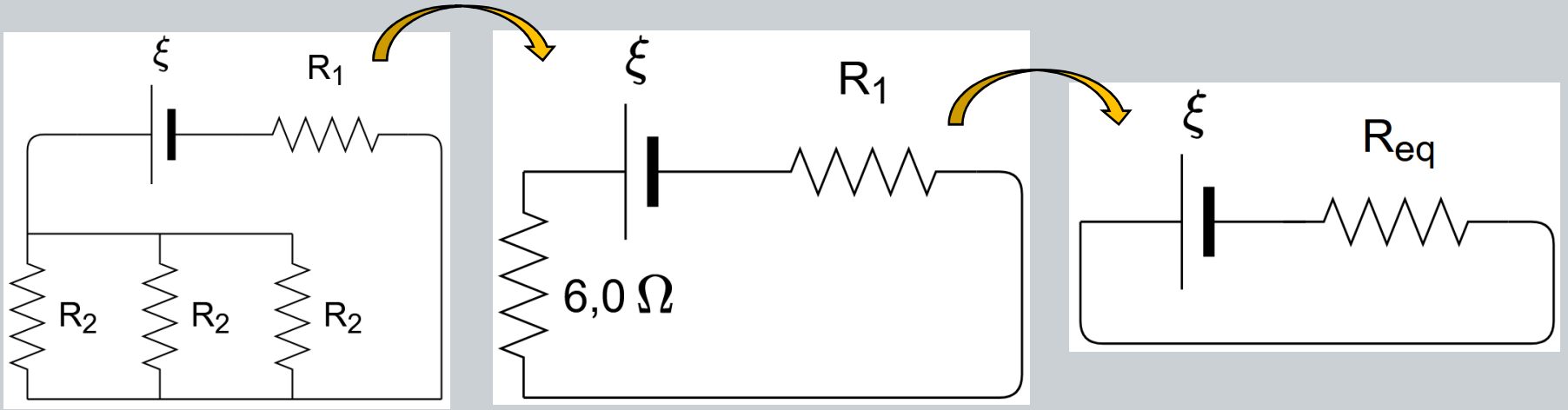
$$\frac{1}{R_{eq}'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \quad \therefore \quad R_{eq}' = \frac{R_2}{3} = \frac{18}{3} = 6{,}0\ \Omega$$

que junto com a resistência $R_1$, permite calcular a resistência equivalente $R_{eq}$ total do circuito com a equação (2):

$$R_{eq} = R_1 + 6{,}0 = 12\ \Omega$$

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 3 – Itens (a)-(c)




Com a resistência equivalente e a d.d.p. da fonte, obtemos a corrente do circuito:

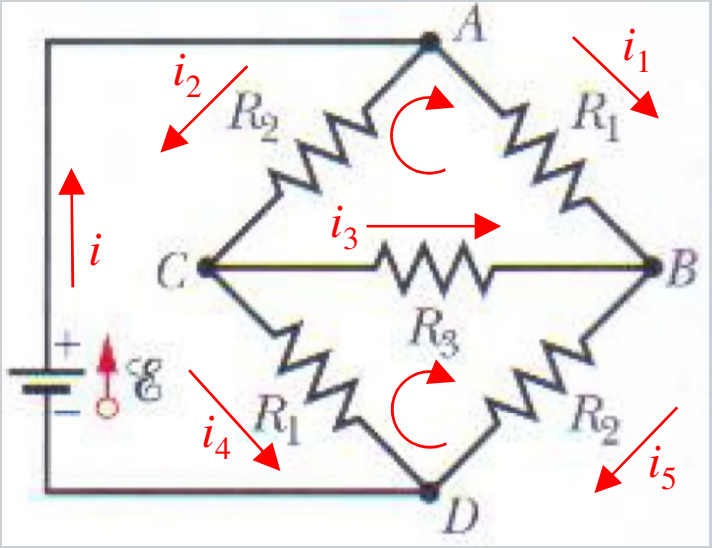
$$\xi = R_{eq} i \quad \therefore \quad i = \frac{\xi}{R_{eq}} = \frac{12}{12} = 1{,}0 \text{ A}$$

como as correntes que passam pelos três resistores são iguais, a corrente $i_1$ = 1/3 A e seu sentido é para direita. A energia dissipada em 1,0 minuto é dada por:

$$P = \frac{dW}{dt} = R_{eq} i^2 \quad \therefore \quad W = R_{eq} i^2 t = (12)(1)^2 (60) = 720 \text{ J}$$

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 4




Aplicando a lei das tensões em relação ao triângulo ABCA:

$$-R_1 i_1 + i_3 R_3 + R_2 i_2 = 0 \qquad (7)$$

em que $i_1$ e $i_2$ são as correntes elétricas convencionadas, respectivamente, nos resistores $R_1$ e $R_2$ superiores. Nos resistores inferiores, a lei das tensões no triângulo DCBD resulta a equação:

$$+R_1 i_4 - R_3 i_3 - R_2 i_5 = 0 \qquad (8)$$

em que $i_4$ e $i_5$ são as correntes elétricas convencionadas, respectivamente, nos resistores $R_1$ e $R_2$ inferiores.

Aplicando a mesma regra em relação a fonte e passando pelos pontos ACD, temos:

$$\xi - R_2 i_2 - R_1 i_4 = 0 \qquad (9)$$

Analisando o lei das correntes nos nós A, C e D, temos:

$$i = i_1 + i_2 = i_4 + i_5 \qquad (10)$$

$$i_2 = i_3 + i_4 \qquad (11)$$

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 4 – Itens (a)-(d)

Podemos reescrever as equações (7)-(11) como:

$$-R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 = 0$$
$$-R_3 i_3 + R_1 i_4 - R_2 i_5 = 0$$
$$R_2 i_2 + R_1 i_4 = \xi$$
$$i_1 + i_2 = i_4 + i_5$$
$$i_2 = i_3 + i_4$$

o permite construir a matriz:

$$\begin{vmatrix} -R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_1 & 0 & \xi \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2000 & 3000 & 4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4000 & 2000 & -3000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 2000 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

# Resolução de problemas

LISTA 7, PROBLEMA 4 – Itens (a)-(d)

$$\left|\begin{array}{cccccc} -2000 & 3000 & 4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4000 & 2000 & -3000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 2000 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \quad L_4 \leftrightarrow L_1$$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4000 & 2000 & -3000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 2000 & 0 & 12 \\ -2000 & 3000 & 4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \quad L_4 \rightarrow L_4 + 2000L_1$$

# Resolução de problemas

LISTA 7, PROBLEMA 4 – Itens (a)-(d)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4000 & 2000 & -3000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 2000 & 0 & 12 \\ 0 & 5000 & 4000 & -2000 & -2000 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \quad L_5 \leftrightarrow L_2$$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 & 2000 & 0 & 12 \\ 0 & 5000 & 4000 & -2000 & -2000 & 0 \\ 0 & 0 & -4000 & 2000 & -3000 & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} L_3 \to L_3 - 3000L_2 \\ L_5 \to L_5 - 5000L_2 \end{array}$$

# Resolução de problemas

LISTA 7, PROBLEMA 4 – Itens (a)-(d)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3000 & 5000 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 9000 & 3000 & -2000 & 0 \\ 0 & 0 & -4000 & 2000 & -3000 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \to L_4 - 3L_3 \\ L_5 \to L_5 + \frac{4}{3} L_3 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3000 & 5000 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -12000 & -2000 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{26000}{3} & -3000 & 16 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ L_5 \to 3L_5 \end{array}$$

# Resolução de problemas

LISTA 7, PROBLEMA 4 – Itens (a)-(d)

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3000 & 5000 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -12000 & -2000 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 26000 & -9000 & 48 \end{array}\right| \quad L_5 \to L_5 + {}^{13}\!/_{6}\, L_4$$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3000 & 5000 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -12000 & -2000 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -{}^{40000}\!/_{3} & -30 \end{array}\right|$$

# Resolução de problemas

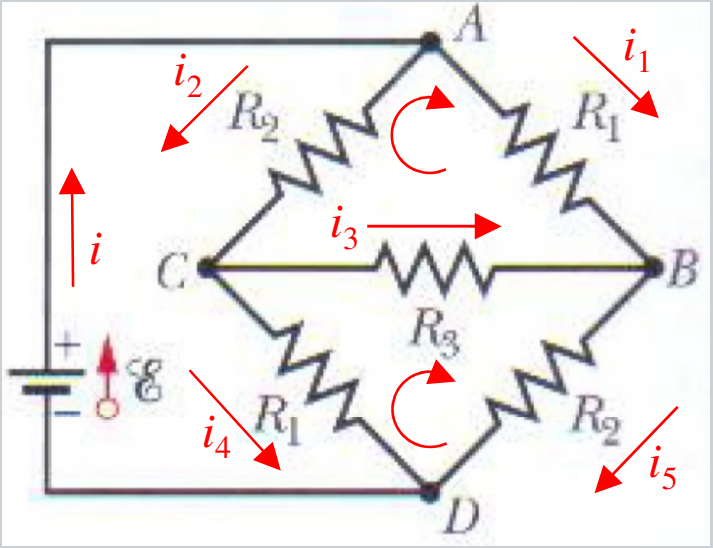
## LISTA 7, PROBLEMA 4 – Itens (a)-(d)

O que permite obter o seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
& i_1 + i_2 - i_4 - i_5 = 0 \\
& i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\
& 3000 i_3 + 5000 i_4 = 12 \\
& -12000 i_4 - 2000 i_5 = -36 \\
& \frac{-40000}{3} i_5 = -30
\end{aligned}
\qquad \Rightarrow \qquad
\begin{aligned}
& i_1 = \frac{21}{8000} = 2{,}625 \text{ mA} \\
& i_2 = \frac{9}{4000} = 2{,}25 \text{ mA} \\
& i_3 = \frac{3}{8000} = -0{,}375 \text{ mA} \\
& i_4 = \frac{21}{8000} = 2{,}625 \text{ mA} \\
& i_5 = \frac{9}{4000} = 2{,}25 \text{ mA}
\end{aligned}
$$

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 4 – Itens (a)-(d)




Observe que $i_1 = i_4$ e $i_2 = i_5$ e isso faz sentido, pois os dois resistores inferiores são iguais aos resistores superiores e a corrente total nos nós A e D devem ser iguais para satisfazer o princípio da conservação da carga. Além disso, o valor de $i_3$ é negativo, indicando que o sentido correto da corrente é de B para C e não de C para B, conforme convencionado nas análises. Para calcular a d.d.p. sobre os pontos do enunciado, basta aplicar diretamente as equações (3) e (4):

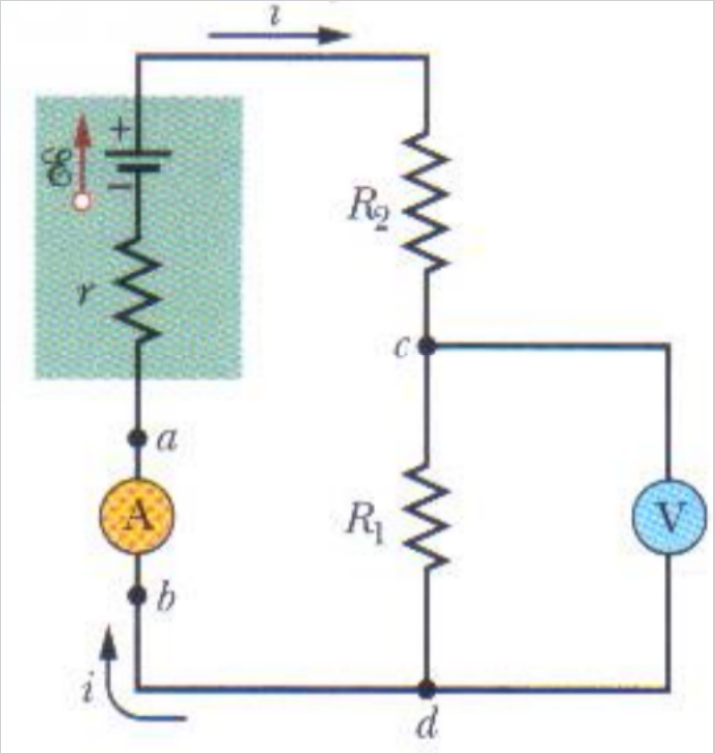
(a) $$V_A - V_B = R_1 i_1 = (2000)\left(2,625\times10^{-3}\right) = 5,25 \text{ V}$$

(b) $$V_B - V_C = R_3 i_3 = (4000)\left(0,375\times10^{-3}\right) = 1,5 \text{ V}$$

(c) $$V_C - V_D = R_1 i_4 = (2000)\left(2,625\times10^{-3}\right) = 5,25 \text{ V}$$

(d) $$V_A - V_C = R_2 i_2 = (3000)\left(2,25\times10^{-3}\right) = 6,75 \text{ V}$$

# Amperímetro e voltímetro

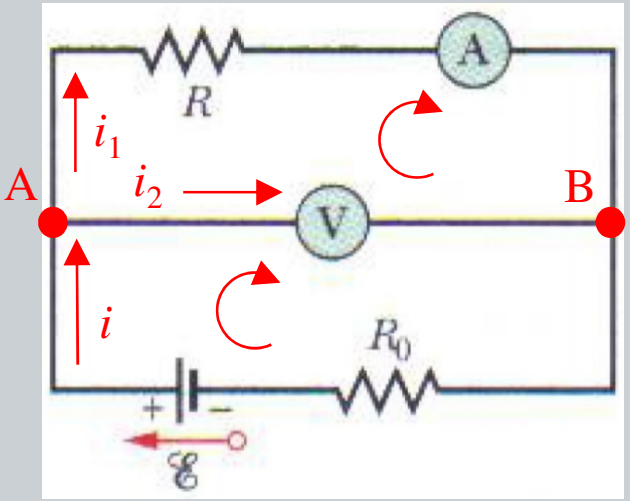



• O **amperímetro** (A) é um dispositivo utilizado para medir corrente elétrica e **deve ser utilizado em série com o circuito**. Sua característica é ter baixa resistência elétrica para não influenciar a corrente do circuito.

• O **voltímetro** (V) é um dispositivo utilizado para medir d.d.p. entre dois pontos e **deve ser utilizado em paralelo com o circuito**. Sua característica é ter elevada resistência para não representar uma ramificação do circuito.

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 7 – Itens (a)-(d)




A corrente produzida pela fonte vai bifurcar no nó A:

$$i = i_1 + i_2 \qquad (12)$$

em que $i_1$ é a corrente que passa pelo amperímetro; portanto, o valor lido pelo instrumento. Para calcular o valor da tensão lido no voltímetro, basta calcularmos:

$$V = R_V i_2 \qquad (13)$$

em que $R_V = 300\ \Omega$ é a resistência interna do voltímetro.

Para determinar essas leituras, precisamos determinar os três valores de corrente. Pela lei das tensões, temos:

$$-Ri_1 - R_A i_1 + R_V i_2 = 0 \quad \text{Malha superior, partindo de A} \qquad (14)$$

$$\xi - R_V i_2 - R_0 i = 0 \quad \text{Malha inferior, partindo da fonte} \qquad (15)$$

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 7 – Itens (a)-(d)

Substituindo (12) em (15) e reorganizando (14) e (15), obtemos:

$$\begin{aligned} -(R+R_A)i_1 + R_V i_2 &= 0 \\ R_0 i_1 + (R_0 + R_V) i_2 &= \xi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -88 i_1 + 300 i_2 &= 0 \\ 100 i_1 + 400 i_2 &= 12 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_1 &= 55{,}2 \text{ mA} \\ i_2 &= 16{,}2 \text{ mA} \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

o que permite determinar a leitura no voltímetro com a equação (13):

$$V = R_V i_2 = (300)\left(16{,}2 \times 10^{-3}\right) = 4{,}86 \text{ V} \qquad \text{(b)}$$

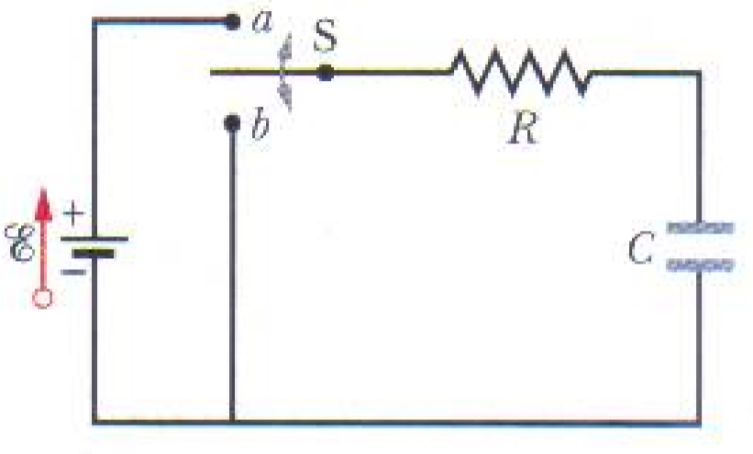
A leitura $V$ é causada pela queda tensão sobre os resistores $R$ e $R_A$. Assim, $R' = R + R_A = 88$ Ω. Desta forma, quanto menor $R_A$, menor é a diferença entre $R$ e $R'$.

→ (c) e (d)

# Circuito RC

## CARREGAMENTO DO CAPACITOR

Considere a chave S conectada no canal *a*. Com a aplicação da lei das tensões, a equação que descreve o comportamento temporal do circuito é:




$$\xi - Ri - V_C = 0$$

$$\xi - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\xi}{R}} \qquad (16)$$

Considerando que o capacitor está descarregado em $t_0 = 0$ e adquire carga $q$ após um intervalo $\Delta t$, a solução da equação (16) é dada por:

$$q(t) = C\xi\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad (17)$$

# Circuito RC

## CARREGAMENTO DO CAPACITOR

As seguintes análises podem ser feitas com a solução (17):

$q(0) = 0$ Capacitor descarregado

$q(t \to \infty) \to C\xi$ Capacitor carregado (carga máxima)

O produto *RC* representa a constante de tempo capacitiva e representa o rapidez com a qual o capacitor é carregado. Quando $t = RC$, o capacitor está 63,2% carregado.

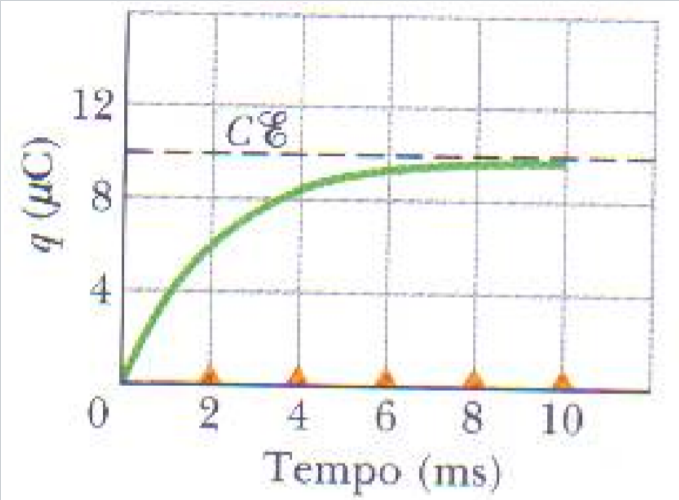
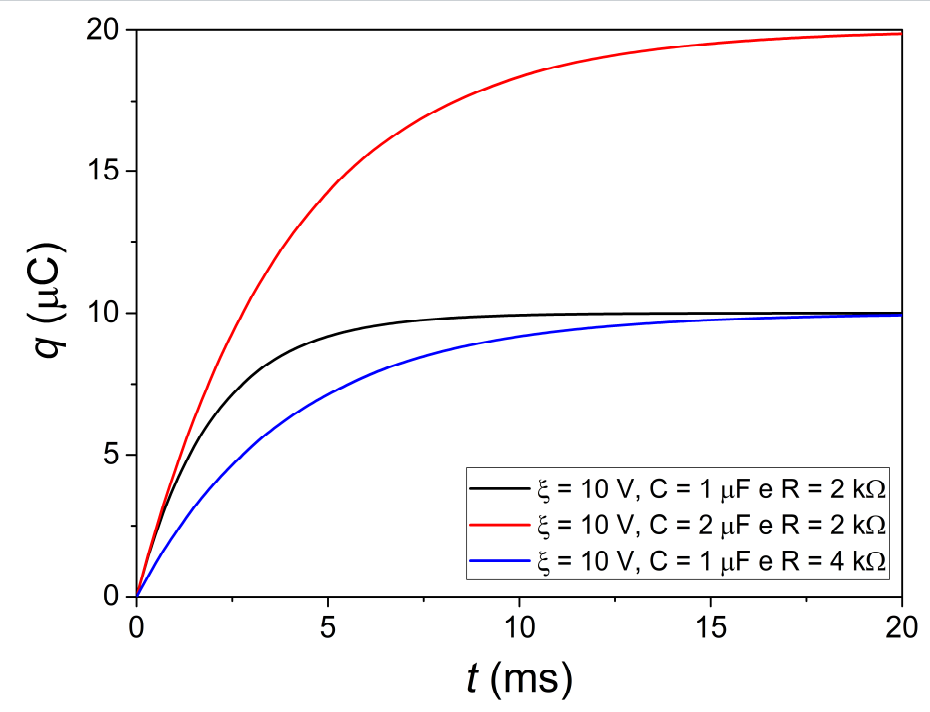



Gráfico produzido com a equação (8) assumindo R = 2 kΩ, C = 1 μF e ξ = 10 V.

# Circuito RC

## CARREGAMENTO DO CAPACITOR

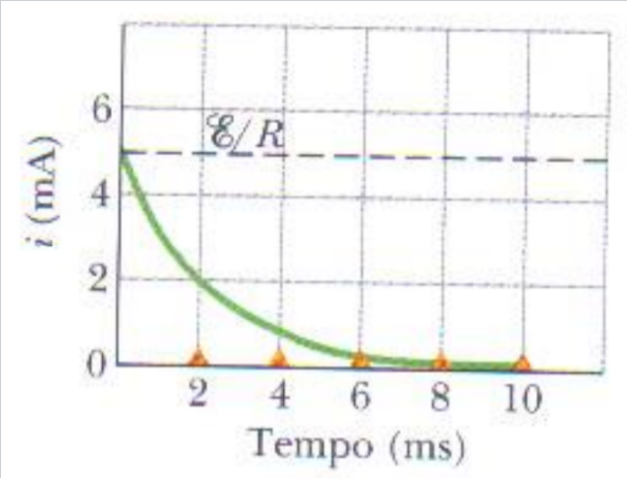
Quando a resistência $R$ aumenta, o capacitor leva mais tempo para carregar; porém, a mesma carga máxima $C\xi$ é obtida. Quando a capacitância $C$ aumenta, o capacitor demora mais para carregar devido a capacidade do dispositivo armazenar mais cargas.



# Circuito RC

## CARREGAMENTO DO CAPACITOR

A partir da equação (17) é possível determinar o comportamento da corrente elétrica do circuito:




$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left[C\xi\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right]$$

$$i(t) = \frac{\xi}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

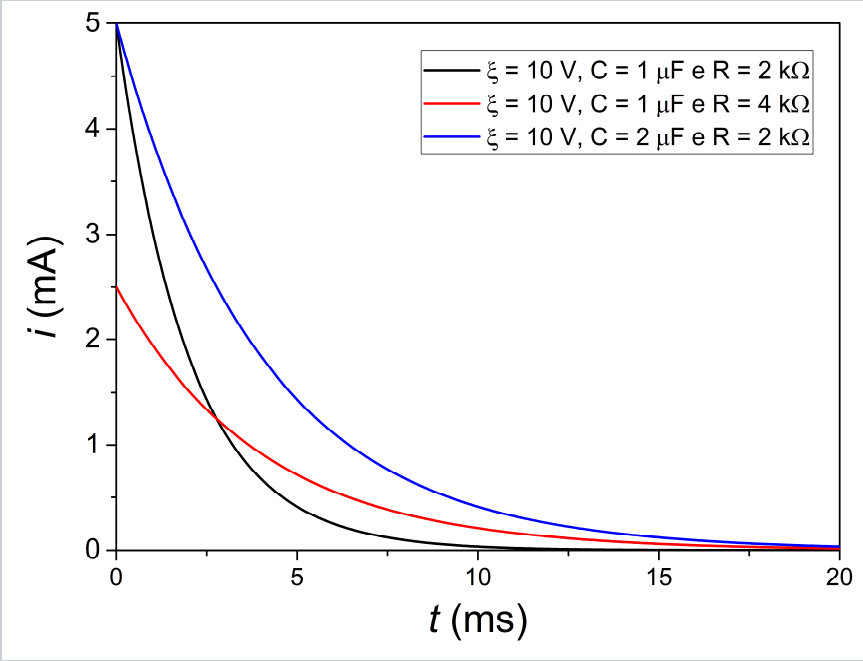
$i(0) = \frac{\xi}{R}$ Capacitor descarregado

$i(t \to \infty) \to 0$ Capacitor carregado (carga máxima)

# Circuito RC

## CARREGAMENTO DO CAPACITOR

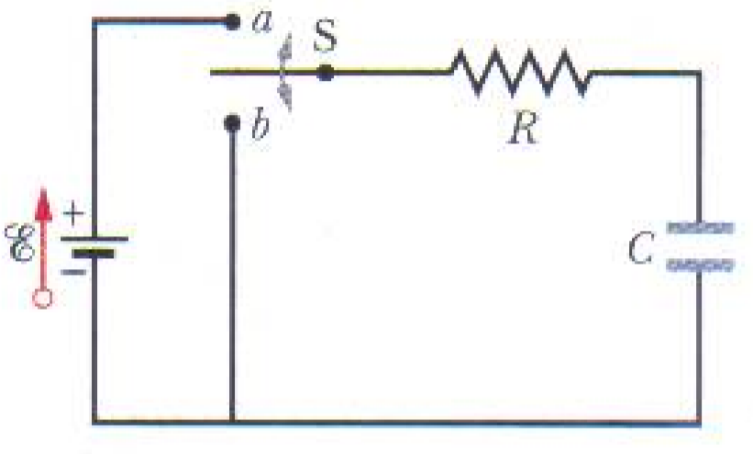
O aumento da resistência de 2 para 4 kΩ reduz pela metade a corrente máxima, mas como a carga máxima no capacitor é a mesma, a corrente com 4 kΩ diminui mais lentamente que a corrente com 2 kΩ. O aumento da capacitância também retarda a queda corrente devido o maior armazenamento de carga no capacitor.



# Circuito RC

## DESCARREGAMENTO DO CAPACITOR

Considere a chave S conectada no canal *b*. Com a aplicação da lei das tensões, a equação que descreve o comportamento temporal do circuito é:




$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \qquad (18)$$

Considerando que o capacitor está carregado com $q_0$ em $t_0 = 0$ e adquire carga $q$ após um intervalo $\Delta t$, a solução da equação (18) é dada por:

$$q(t) = C\xi e^{-\frac{t}{RC}} = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (19)$$

# Circuito RC

## DESCARREGAMENTO DO CAPACITOR

As seguintes análises podem ser feitas com a solução (19):

$$q(0) = q_0 \qquad \text{Capacitor carregado (carga máxima)}$$

$$q(t \to \infty) \to 0 \qquad \text{Capacitor descarregado}$$

A partir da equação (19) é possível determinar o comportamento da corrente elétrica do circuito:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left[q_0 e^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

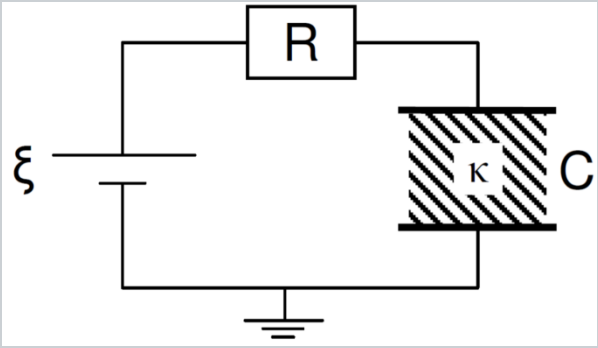
$$i(t) = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{\xi}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(0) = -\frac{\xi}{R} \qquad \text{Capacitor carregado}$$

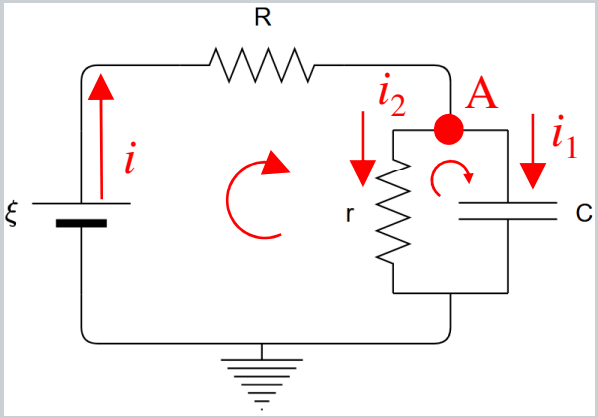
$$i(t \to \infty) \to 0 \qquad \text{Capacitor descarregado}$$

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 11 – Itens (a) e (b)




Considerando que existe fuga de corrente através do capacitor, existem dois efeitos **em paralelo**: (i) armazenamento de cargas nas placas e (ii) passagem de corrente elétrica entre os terminais.




Assim, o capacitor original pode ser representado por um capacitor sem ruptura de capacitância $C$ em paralelo com um resistor $r$ que representa a resistência do dielétrico. A corrente $i$ bifurca no ponto A, gerando a corrente $i_2$ que passa por $r$ e $i_1$ que é responsável por carregar o capacitor ideal.

Para determinar a tensão entre os terminais do capacitor, precisamos encontrar a carga armazenada no dispositivo, pois $V_C = q/C$. Para isso, usamos a lei das malhas:

$$\xi - Ri - ri_2 = 0 \qquad (20)$$

$$-V_C + ri_2 = 0 \qquad (21)$$

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 11 – Itens (a) e (b)

e a lei das correntes:

$$i = i_1 + i_2 \qquad (22)$$

Precisamos obter a carga do capacitor e essa informação está na corrente $i_1$. Substituindo (22) e (21) em (20):

$$\xi - R\left(i_1 + i_2\right) - V_C = 0$$

$$\xi - R\frac{dq}{dt} - R\left(\frac{q}{rC}\right) - \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC}\left(\frac{R}{r} + 1\right) = \frac{\xi}{R}$$

Para fins de resolução, vamos chamar o termo $(R/r + 1) = \alpha$. Assim:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{\alpha}{RC}q = \frac{\xi}{R} \qquad (23)$$

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 11 – Itens (a) e (b)

A equação (23) é uma EDO separável:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\xi}{R} - \frac{\alpha}{RC} q \longrightarrow \frac{dq}{\left(q - \frac{C\xi}{\alpha}\right)} = -\frac{\alpha}{RC} dt \longrightarrow \int_0^q \frac{dq}{\left(q - \frac{C\xi}{\alpha}\right)} = -\frac{\alpha}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(q - \frac{C\xi}{\alpha}\right)\Bigg|_0^q = -\frac{\alpha}{RC} t \longrightarrow \ln\left[\frac{\left(q - \frac{C\xi}{\alpha}\right)}{-\frac{C\xi}{\alpha}}\right] = -\frac{\alpha}{RC} t$$

$$q(t,r) = \frac{C\xi}{\alpha}\left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{RC} t\right)\right] = \frac{rC\xi}{R+r}\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{R+r}{rRC}\right)t\right]\right\}$$

# Resolução de problemas

## LISTA 7, PROBLEMA 11 – Itens (a) e (b)

Com a determinação da carga no capacitor, a tensão $V_C$ é dada por:

$$V_C(t,r) = \frac{q(t,r)}{C} = \frac{r\xi}{R+r}\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{R+r}{rRC}\right)t\right]\right\}$$

As seguintes análises podem ser feitas com equação acima:

$$V_C(t, r \to 0) = 0$$

Ruptura da constante dielétrica

$$V_C(t, r \to \infty) \to \xi\left[1-\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

Dielétrico sem ruptura

Mesma solução da equação (17)

## Dúvidas?

diego.duarte@ufsc.br

Skype: diego_a_d

Encontrou algum erro nesta aula? Me informe via e-mail ;)

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA