Física 3 (EMB5043): Corrente alternada e circuitos

MATERIAL DE APOIO PARA CURSO PRESENCIAL

Prof. Diego Alexandre Duarte
Universidade Federal de Santa Catarina | Centro Tecnológico de Joinville

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

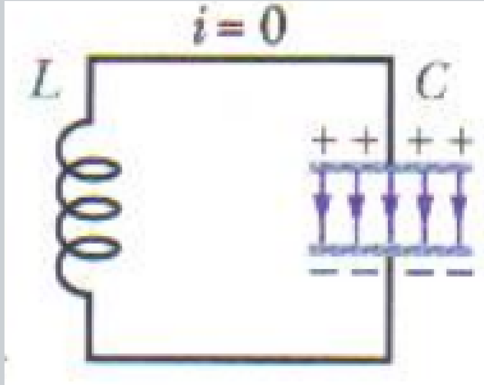
Sumário

- Circuitos LC
- Circuitos RLC
- Corrente alternada
  - Carga resistiva
  - Carga capacitiva
  - Carga Indutiva
  - Circuito RLC em série
  - Constante de fase
- Potência
- Transformadores
- Resolução de problemas da Lista 11

Material para estudos

- Capítulo 31 do Halliday volume 3 e capítulo 10 do Moysés volume 3.
- Estudar os problemas da Lista 11 que está disponível em diegoduarte.paginas.ufsc.br.

Circuitos LC



Considere um circuito formado por um indutor de indutância L e um capacitor de capacitância C carregado com carga q conectados em série:

$$-\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \therefore \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

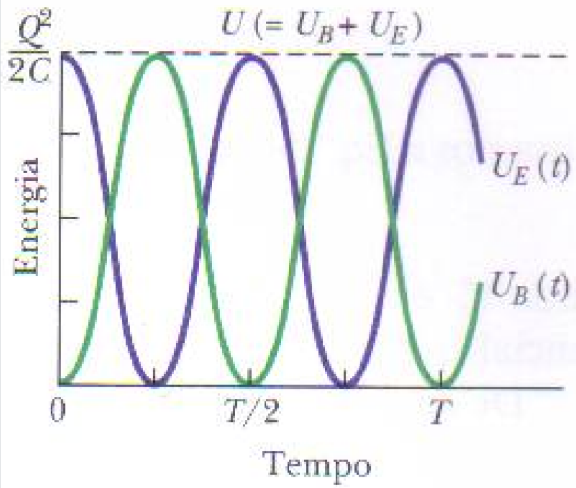
Como o capacitor está carregado, $q(0) = q_0$, e a solução da equação acima é dada por:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t)$$

em que q_0 é a carga do capacitor em $t_0 = 0$. A frequência de oscilação nas placas do capacitor é:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Circuitos LC



A corrente no circuito é dada por:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin(\omega t)$$

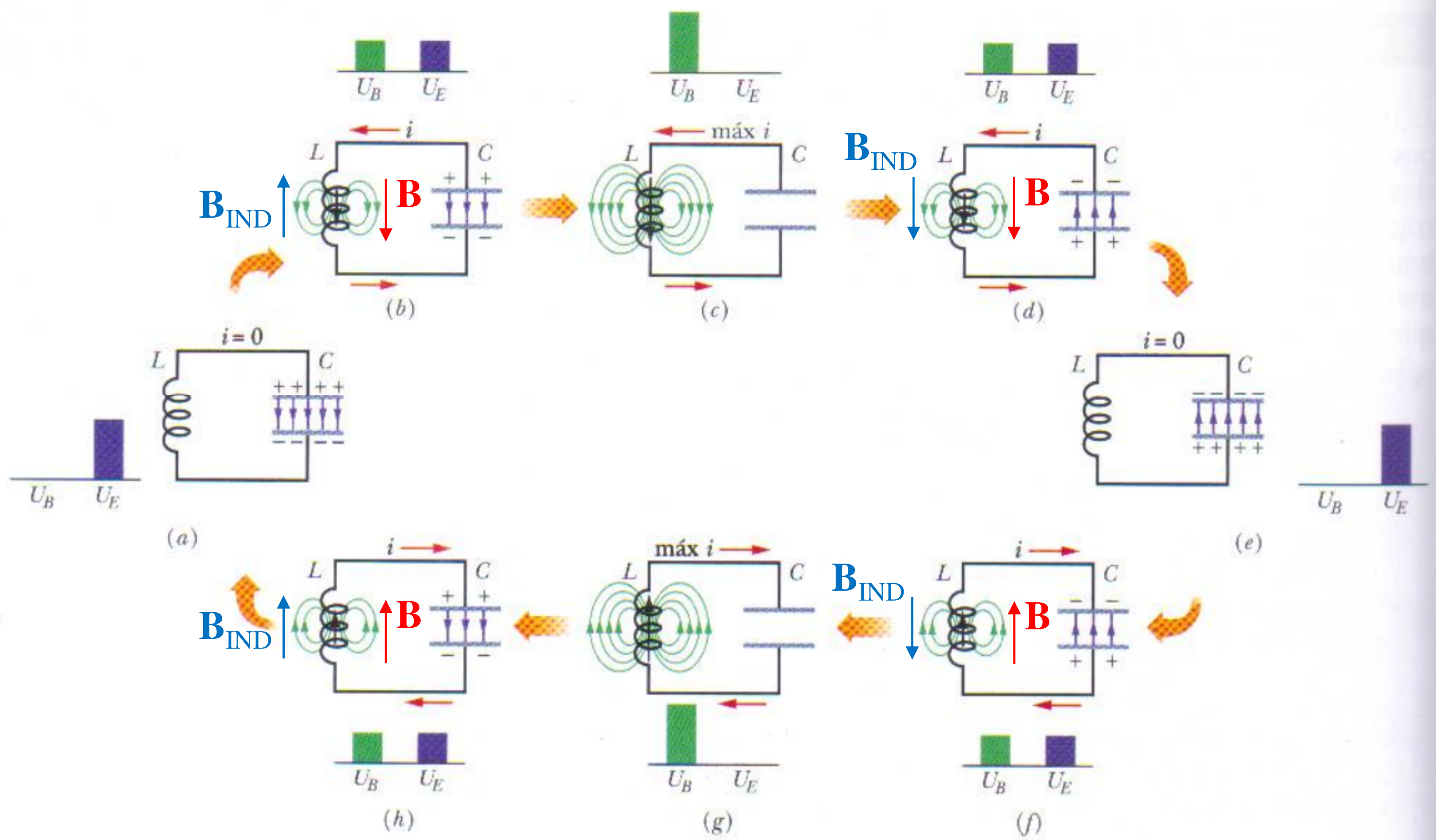
indicando que a corrente é máxima quando a carga no capacitor é zero e vice-versa. Como foi demonstrado em aulas passadas, as energias em cada dispositivo são dadas por:

$$U_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{L[-q_0 \omega \sin(\omega t)]^2}{2} = \frac{Lq_0{}^2 \omega^2 [\sin(\omega t)]^2}{2} = \frac{q_0{}^2 [\sin(\omega t)]^2}{2C}$$

$$U_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{[q_0 \cos(\omega t)]^2}{2C} = \frac{q_0{}^2 [\cos(\omega t)]^2}{2C}$$

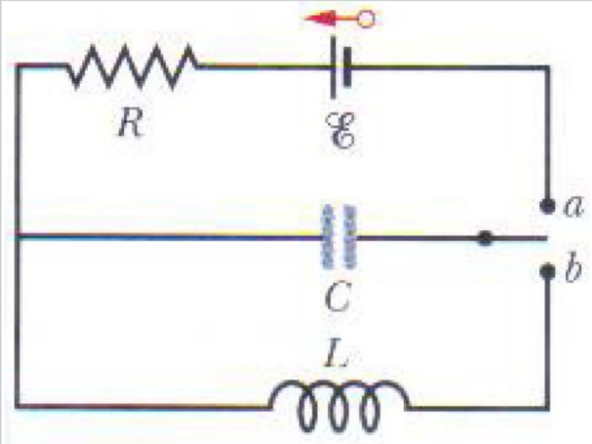
mostrando que a energia total é conservada: $U = U_L + U_C = \dfrac{q_0{}^2}{2C}$

Circuitos LC



Resolução de problemas

LISTA 11, PROBLEMA 2 – Itens (a) e (b)



A chave mantida no canal a por um longo tempo faz o capacitor atingir a carga de saturação. Note que enquanto isso acontece, o indutor não faz parte do circuito e temos apenas um circuito *RC*:

$$q = C\xi\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

A chave ligada por um longo tempo significa $t \to \infty$ na equação acima. Logo, a carga de saturação é $C\xi$ = 210,8 μC.

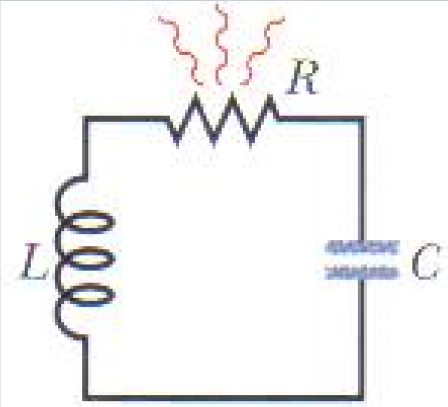
Após o carregamento do capacitor, a chave é trocada para o terminal b e o circuito adquire oscilação LC com frequência:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\left(54\times10^{-3}\right)\left(6,20\times10^{-6}\right)}} = 1728 \text{ rad/s}$$

que vale também 275 Hz. A módulo da amplitude de corrente é dado por:

$$i = q_0\omega = \left(210,8\times10^{-6}\right)\left(1728\right) = 364 \text{ mA}$$

Circuitos RLC



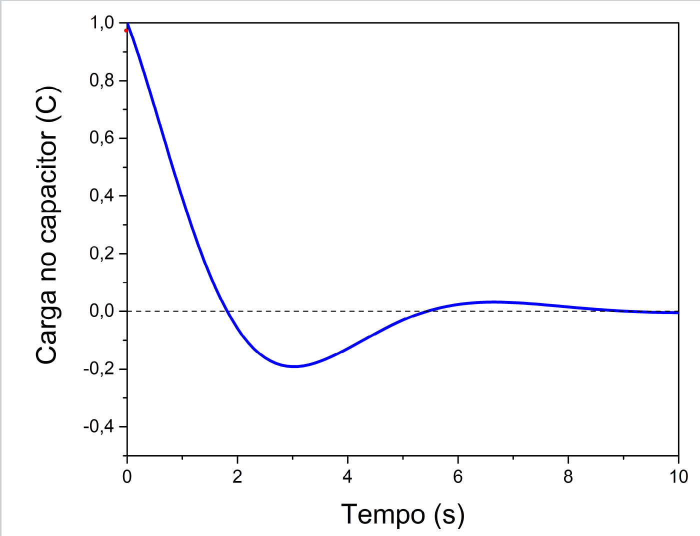
No circuito RLC temos um resistor de resistência R conectado em série com o circuito LC. A função deste componente é dissipar a energia acumulada no indutor e capacitor:

$$-Ri - \frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \therefore \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

A solução da equação acima, considerando $q(0) = q_0$, é:

$$q(t) = q_0 e^{-Rt/2L}\cos(\omega' t) \quad \text{com}$$

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(R/2L\right)^2} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

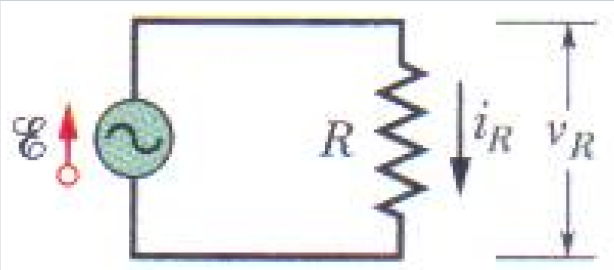


O gráfico ao lado foi obtido considerando R = 1 Ω, C = 1 F, L = 1 H e q_0 = 1 C.

Corrente alternada

CARGA RESISTIVA

Considere uma fonte de tensão alternada:



$$\xi = \xi_m \sin\left(\omega_d t\right)$$

conectada em um resistor de resistência R com corrente i_R. A fonte oscila com frequência forçada ω_d. Como existe apenas um resistor, a queda de tensão v_R é igual a fem da fonte:

$$v_R = V_R \sin\left(\omega_d t\right)$$

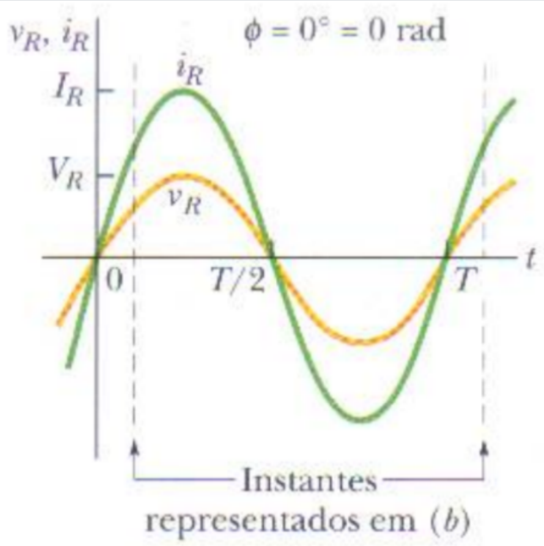
com $V_R = \xi_m$ representando a amplitude de tensão. O comportamento da corrente é dada pela lei de Ohm:

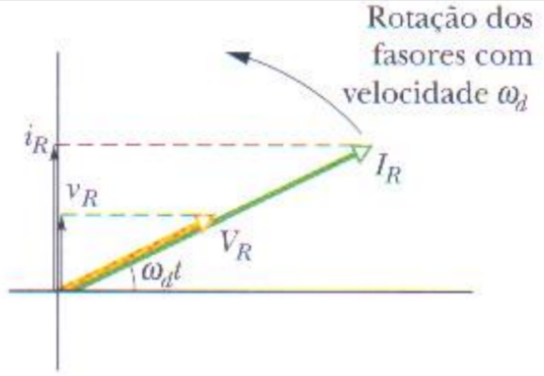
$$i_R = \frac{V_R}{R} \sin\left(\omega_d t\right) = I_R \sin\left(\omega_d t\right)$$

Podemos representar a tensão e a corrente no formato gráfico ou no **diagrama de fasores**.

Corrente alternada

CARGA RESISTIVA





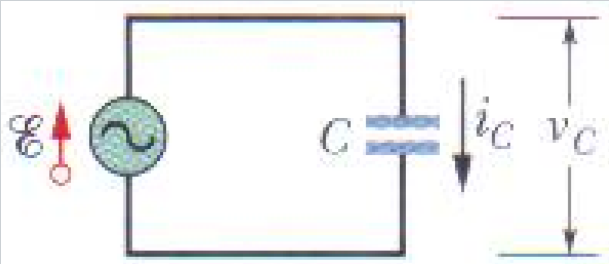
Os gráficos da tensão e corrente mostram que as curvas estão em fase, com os picos sendo atingidos no mesmo instante.

O **diagrama de fasores** é formado por vetores dispostos na direção radial que rotacionam no sentido horário do plano cartesiano com o eixo de rotação na origem do sistema de coordenadas. Cada vetor representa a amplitude de uma grandeza que está sendo medida. A frequência de rotação é a frequência de oscilação da fonte do circuito. A projeção dos vetores no eixo das ordenadas representa o valor instantâneo da grandeza.

O diagrama ao lado mostra que os fasores de corrente e tensão do circuito com carga resistiva estão em fase, *i.e.*, estão sobrepostos, indicando que atingem os pontos de máximo e mínimo no mesmo instante, conforme vimos na análise anterior. Porém, conforme veremos, existem casos em que os fasores não estão em fase.

Corrente alternada

CARGA CAPACITIVA



Considere agora que a mesma fonte de tensão alternada está conectada em um capacitor de capacitância C com corrente i_C. A fonte oscila com frequência forçada ω_d. Como existe apenas um capacitor, a queda de tensão v_C é igual a fem da fonte:

$$v_C = V_C \sin(\omega_d t)$$

em que V_C é a amplitude de tensão. A carga e a corrente no capacitor são dadas por:

$$q_C = C v_C = C V_C \sin(\omega_d t)$$

A corrente está 90º na frente da tensão

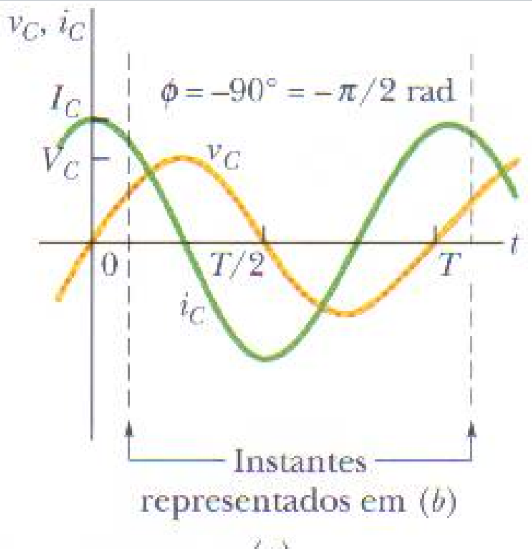
$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_d C V_C \cos(\omega_d t) = \omega_d C V_C \sin(\omega_d t \boxed{+90})$$

onde o termo $1/\omega_d C$ é chamado de reatância capacitiva X_C (dada em Ohms no SI):

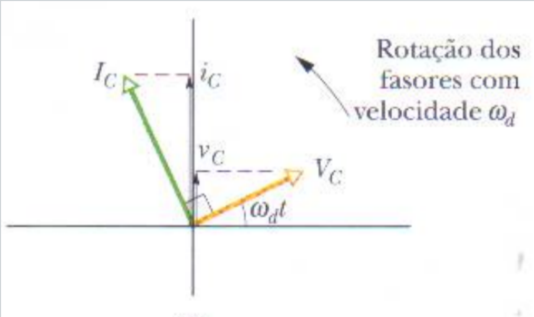
$$i_C = \frac{V_C}{X_C} \sin(\omega_d t + 90) = I_C \sin(\omega_d t + 90) \quad \text{com} \quad V_C = X_C I_C$$

Corrente alternada

CARGA CAPACITIVA



(a)



(b)

A reatância capacitiva:

$$X_C = \frac{1}{C\omega_d}$$

mede uma resistência variável do circuito. O aumento da capacitância C faz com que mais cargas sejam acumuladas nas placas para uma mesma frequência; logo, a corrente i_C aumenta. O aumento da frequência ω_d também aumenta a corrente i_C devido o carregamento do capacitor num período menor.

O diagrama de fasores mostra que a amplitude de corrente está 90º na frente da amplitude de tensão.

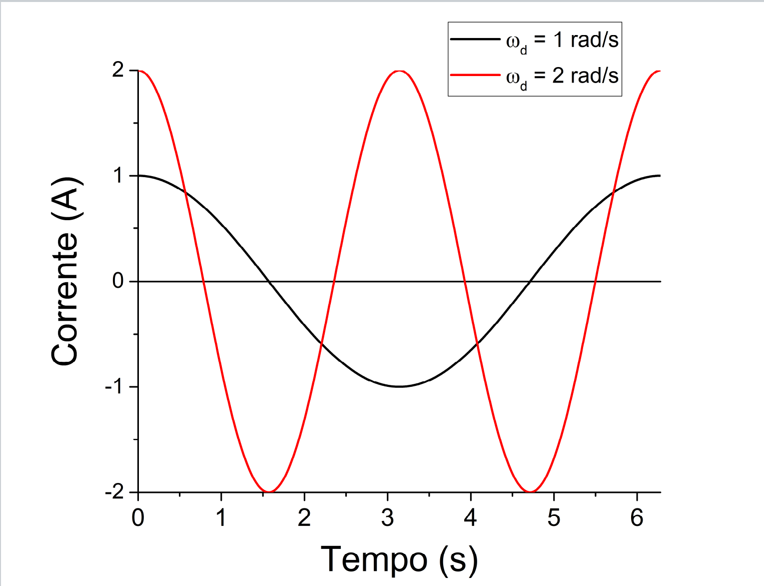
Corrente alternada

CARGA CAPACITIVA

$$q = \int i dt = \int \frac{V_C}{X_C} \cos(\omega_d t) dt = C\omega_d V_C \int_{t_0}^{t} \cos(\omega_d t) dt = CV_C \sin(\omega_d t)\Big|_{t_0}^{t}$$

$$\boxed{q = CV_C \sin(\omega_d t)\Big|_0^{T/4} = CV_C = (1)(1) = 1\ \mathrm{C}}$$

Carga acumulada no capacitor após ¼ de período de oscilação da fonte.

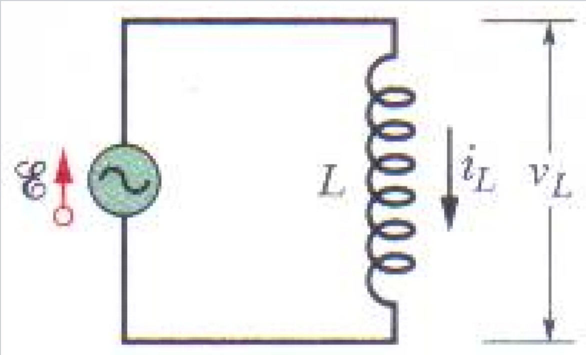


Amplitude da carga no capacitor não depende da frequência da fonte; logo, é a mesma carga total para diferentes frequências.

Isso mostra que o capacitor é carregado mais lentamente para frequências menores, implicando na redução da corrente elétrica e aumento da reatância capacitiva.

Corrente alternada

CARGA INDUTIVA



Considere agora que a mesma fonte de tensão alternada está conectada em um indutor de indutância L com corrente i_L. A fonte oscila com frequência forçada ω_d. Como existe apenas um indutor, a queda de tensão v_L é igual a fem da fonte:

$$v_L = V_L \sin(\omega_d t)$$

em que V_L é a amplitude de tensão. A corrente no indutor é dada por:

A corrente está 90º atrás da tensão

$$v_L = L\frac{di_L}{dt} = V_L \sin(\omega_d t) \quad \therefore \quad i_L = \frac{V_L}{L}\int \sin(\omega_d t)$$

$$i_L = -\frac{V_L}{\omega_d L}\cos(\omega_d t) = \frac{V_L}{\omega_d L}\sin(\omega_d t \boxed{-90})$$

onde o termo $\omega_d L$ é chamado de reatância indutiva X_L (dada em Ohms no SI):

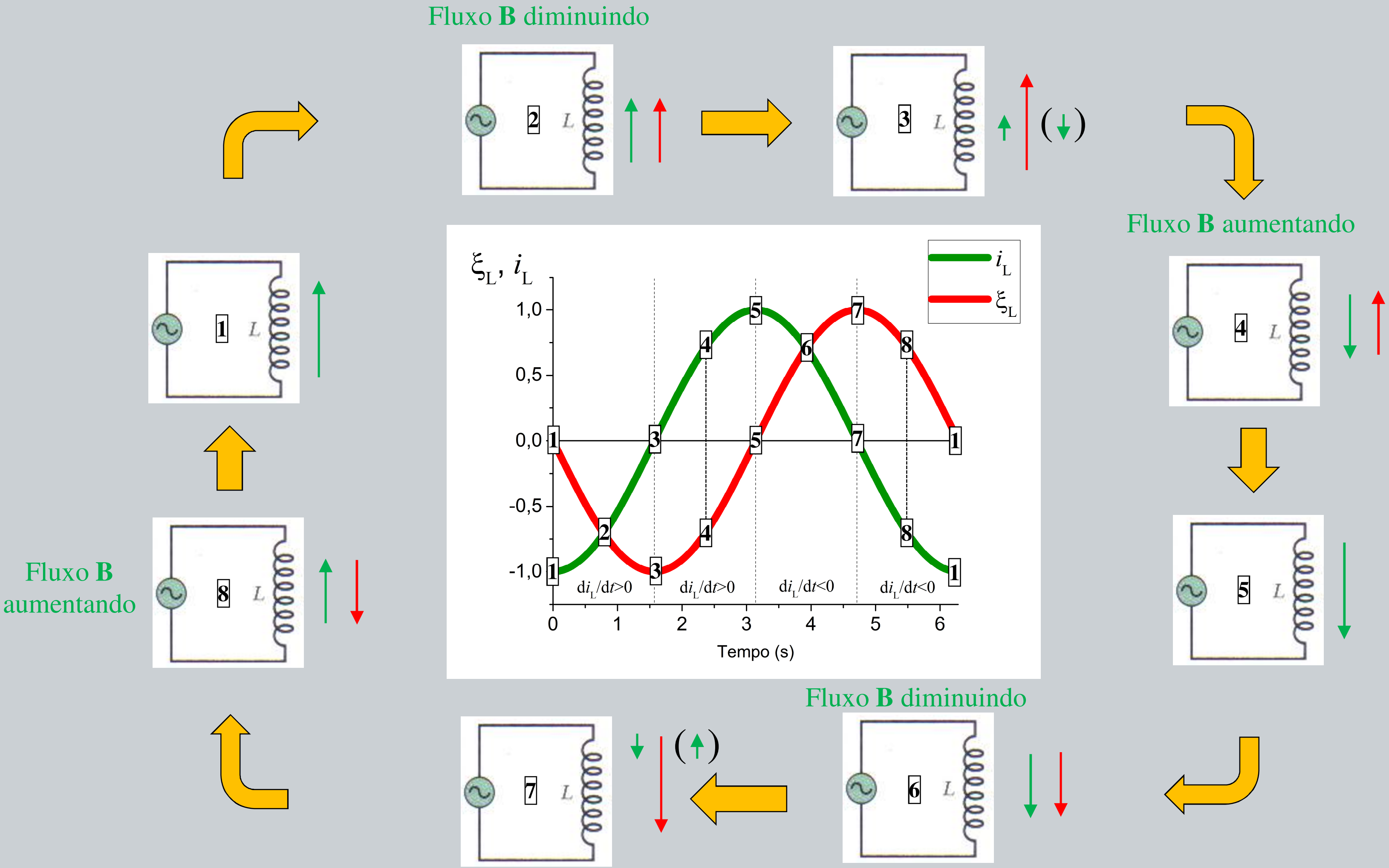
$$i_L = -\frac{V_L}{X_L}\cos(\omega_d t) = -I_L\cos(\omega_d t) \quad \text{com} \quad V_L = X_L I_L$$

Corrente alternada

CARGA INDUTIVA

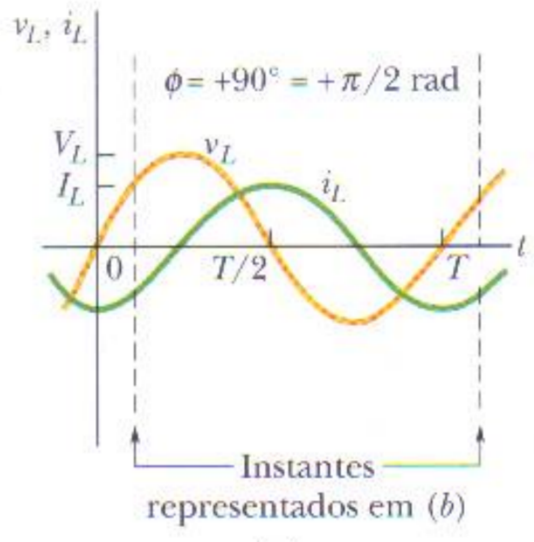
$$i_L = -\frac{V_L}{\omega_d L}\cos(\omega_d t)$$

$$\xi_L = -L\frac{di_L}{dt} = -V_L \sin(\omega_d t)$$

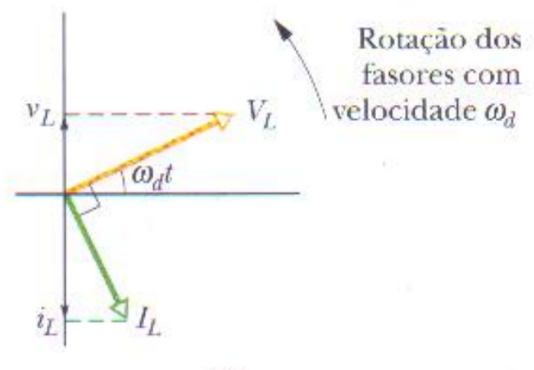


Corrente alternada

CARGA INDUTIVA



(a)



(b)

A reatância indutiva:

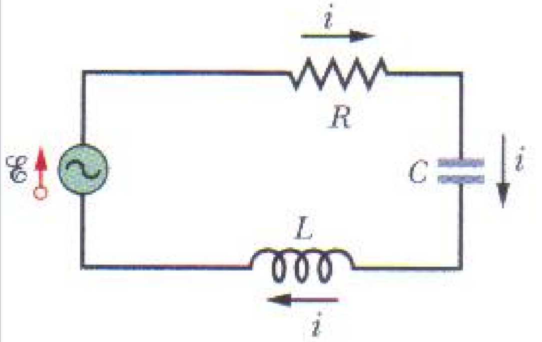
$$X_L = \omega_d L$$

mede uma resistência variável do circuito. O aumento da indutância L e da frequência ω_d provocam a redução da corrente i_L devido o aumento da fem induzida.

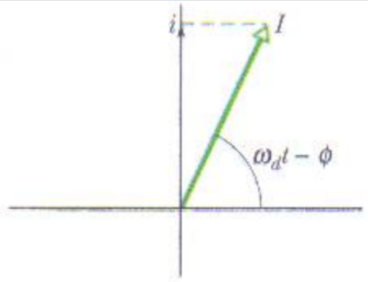
O diagrama de fasores mostra que a amplitude de corrente está 90º atrás da amplitude de tensão.

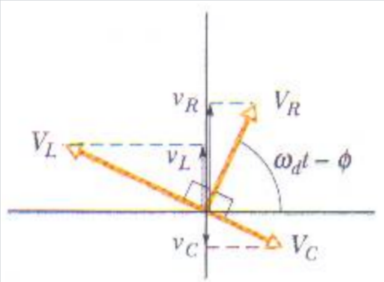
Corrente alternada

CIRCUITO RLC EM SÉRIE E CONSTANTE DE FASE



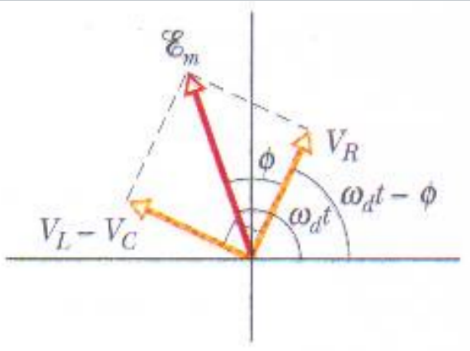
Para estudar o circuito RLC em série, vamos utilizar o diagrama de fasores. A corrente no circuito é a mesma para todos os componentes. Assim, representamos o fasor da corrente como *I*. O fasor da resistência está em fase com a corrente, enquanto o fasor do capacitor está 90º atrás e o fasor do indutor está 90º a frente.





O diagrama de fasores obedece a soma vetorial; logo, podemos realizar a subtração $V_L - V_C$ e somar, em seguida, com o fasor V_R por meio da equação de Pitágoras para calcular a amplitude da fonte de tensão:

$$\xi_m^{\,2} = V_R^{\,2} + \left(V_L - V_C\right)^2 \qquad (1)$$



Com o diagrama de fasores, também é possível calcular a **constante de fase** do circuito que mostra se ele é mais capacitivo ou indutivo:

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad (2)$$

Corrente alternada

CIRCUITO RLC EM SÉRIE E CONSTANTE DE FASE

Com a definição de reatância, podemos reescrever a equação (1) da seguinte forma:

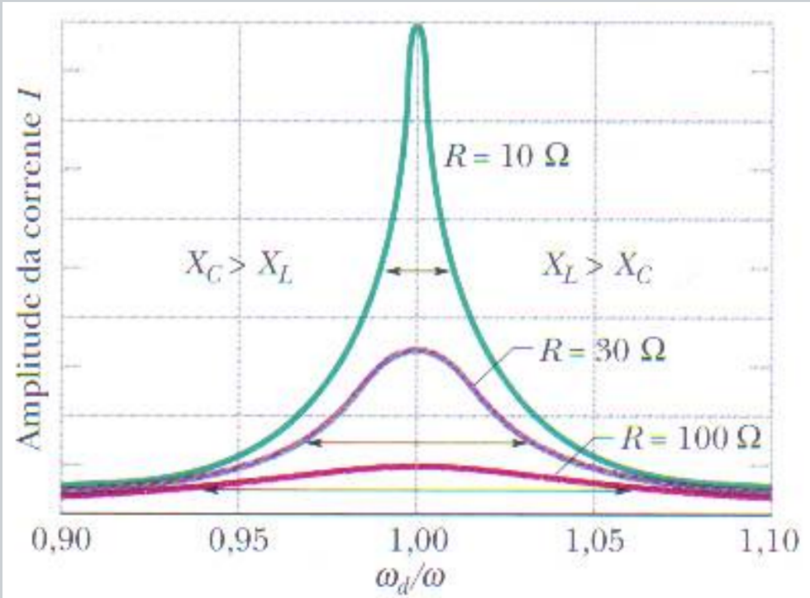
$$\xi_m^{\ 2} = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2 = I^2\left[R^2 + \left(\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C}\right)^2\right] \Rightarrow \boxed{I = \frac{\xi_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C}\right)^2}}} \quad (3)$$

As equações (2) e (3) mostram que:

- o circuito é mais capacitivo para $\omega_d < \omega$;
    - $X_L < X_C \therefore \tan\phi < 0$
- o circuito é mais indutivo para $\omega_d > \omega$;
    - $X_L > X_C \therefore \tan\phi > 0$
- o circuito entra em ressonância para $\omega_d = \omega$:
    - $X_C = X_L \therefore \tan\phi = 0$

$$\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C} = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

frequência de ressonância



Resolução de problemas

LISTA 11, PROBLEMA 5 – Itens (a), (b) e (c)

A corrente é máxima quando a frequência de oscilação é igual a frequência natural do circuito LC oscilante:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{(1,00)\left(20,0\times10^{-6}\right)}} = 224 \text{ rad/s}$$

Na frequência de ressonância, a corrente é dada por:

$$I_{\text{máx}} = \frac{\xi_m}{Z} = \frac{30,0}{5,00} = 6,00 \text{ A}$$

Para calcular as frequências para $I = I_{\text{máx}}/2$, devemos resolver a equação:

$$I = \frac{\xi_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_d L - \frac{1}{\omega_d C}\right)^2}} \quad \therefore \quad 3,00 = \frac{30,0}{\sqrt{25 + \left(1,00\omega_d - \frac{1}{\omega_d C}\right)^2}}$$

Resolução de problemas

LISTA 11, PROBLEMA 5 – Item (c)

Reescrevendo a equação para ω_d:

$$\omega_d^{\,4} - 100075\omega_d^{\,2} + \left(2,5\times10^9\right) = 0$$

substituindo $\omega_d^2 = x$ obtemos a equação:

$$x^2 - 100075x + \left(2,5\times10^9\right) = 0$$

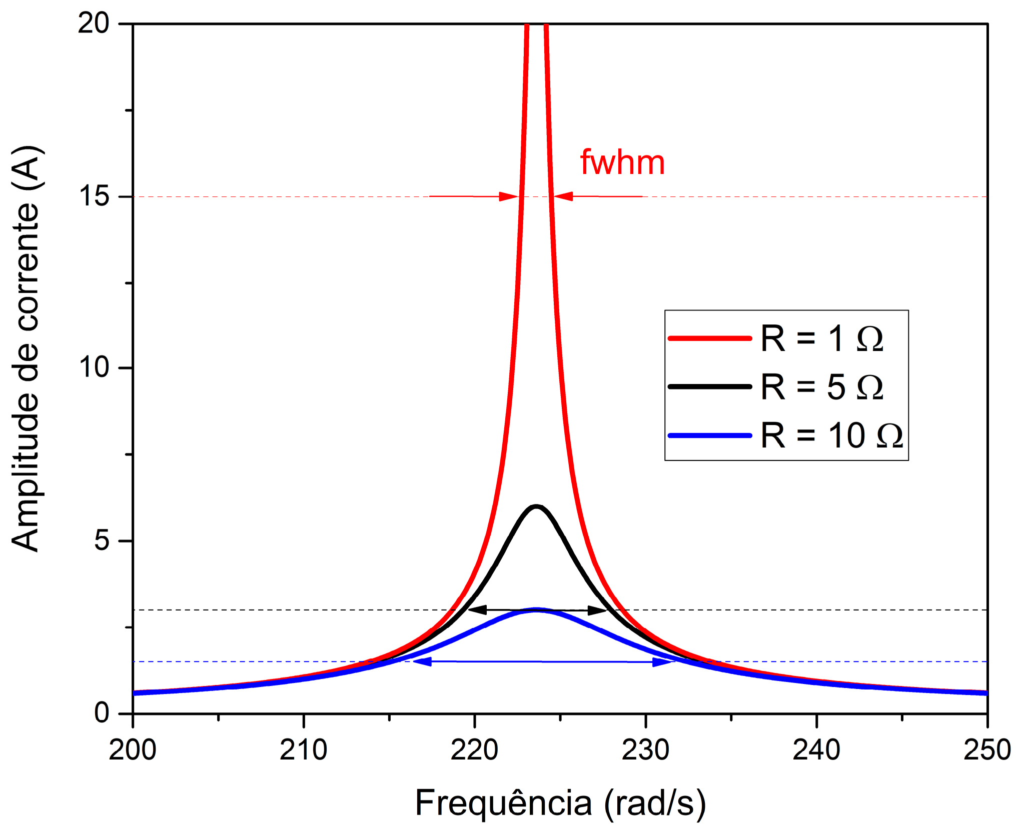
que permite obter a solução:

$$x = \frac{100075 \pm \sqrt{\left(100075\right)^2 - 4\times\left(2,5\times10^9\right)}}{2} = \begin{cases} 51974,35 \\ 48100,65 \end{cases}$$

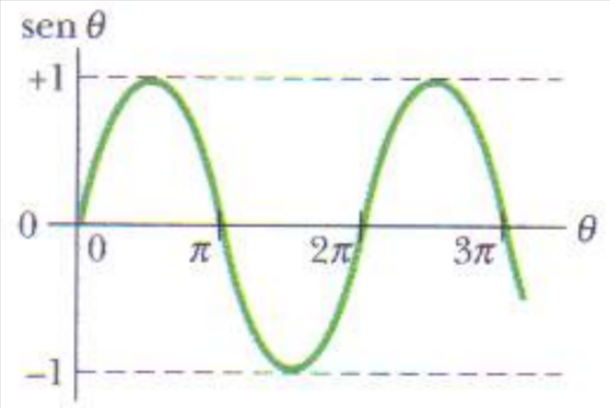
Com a variável original, obtemos: $$\omega_d = \begin{cases} \pm\sqrt{51974,35} = \begin{cases} 227,98 \text{ rad/s} \\ -227,98 \text{ rad/s} \end{cases} \\ \pm\sqrt{48100,65} = \begin{cases} 219,32 \text{ rad/s} \\ -219,32 \text{ rad/s} \end{cases} \end{cases}$$

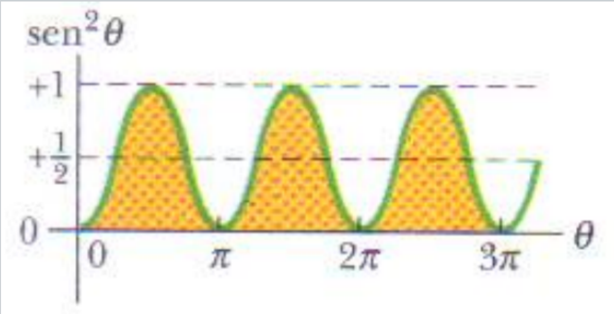
Resolução de problemas

LISTA 11, PROBLEMA 5 – Item (d)



Potência





A potência dissipada no resistor de um circuito com corrente alternada é dada por:

$$P = i^2 R = \left[I \sin\left(\omega_d t\right)\right]^2 R = I^2 R \sin^2\left(\omega_d t\right)$$

O quadrado da função seno permite calcular o valor médio da potência:

$$P_{méd} = \frac{I^2 R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R$$

em que $I/\sqrt{2}$ é chamada de corrente quadrática média I_{RMS}:

$$P_{méd} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R = {I_{RMS}}^2 R$$

Similarmente, podemos escrever:

$$V_{RMS} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \xi_{RMS} = \frac{\xi_m}{\sqrt{2}}$$

Potência

Com a definição de valor quadrático médio, podemos calcular a corrente do circuito RLC como:

$$I_{RMS} = \frac{\xi_{RMS}}{Z} = \frac{\xi_{RMS}}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}}$$

em que Z é chamada de impedância, dada em Ohm no SI. Com essa equação, podemos reescrever a expressão da potência média:

$$P_{méd} = I_{RMS}{}^2 R = I_{RMS}\left(I_{RMS} R\right) = \frac{\xi_{RMS}}{Z}\left(I_{RMS} R\right) = \xi_{RMS} I_{RMS} \frac{R}{Z}$$

com a razão *R/Z* podendo ser escrita como:

$$\frac{R}{Z} = \frac{IR}{IZ} = \frac{V_R}{\xi_m} = \cos\phi$$

Potência

que permite escrever a potência média como:

$$P_{méd} = \xi_{RMS} I_{RMS} \frac{R}{Z} = \xi_{RMS} I_{RMS} \cos\phi$$

onde a função cosseno recebe o nome de **fator de potência** e mede a potência transmitida para a carga resistiva.

Para maximizar essa transferência, o fator deve ser 1, indicando que o circuito é constituído de uma resistência pura ou está operando na região de ressonância.

O ângulo ϕ está definido entre –90º e +90º ($-\pi/2 \leq \phi \leq +\pi/2$) e nesta faixa a função cosseno é sempre positiva: $\cos \phi = \cos(-\phi)$.

Potência

LINHAS DE TRANSMISSÃO

Em linhas de transmissão o fator de potência é 1; desta forma, a fem da fonte é igual a tensão entre os terminais da carga:

$$P_{méd} = \xi_{RMS} I_{RMS}$$

Considere a linha de 735 kV usada para transmitir energia da usina hidrelétrica La Grande 2, em Quebec, para a cidade de Montreal, situada a 1000 km de distância.

Considerando que a corrente é 500 A, a potência transmitida pela usina é:

$$P_{méd} = \xi_{RMS} I_{RMS} = \left(735 \times 10^3\right)\left(500\right) = 367,5 \text{ MW}$$

A resistência da linha de transmissão é 0,220 Ω/km. Desta forma, a potência dissipada na linha é:

$$P_{méd} = I_{RMS}{}^2 R = \left(500\right)^2 \left(220\right) = 55 \text{ MW}$$

Potência

LINHAS DE TRANSMISSÃO

A potência dissipada representa 15% da potência transmitida pela usina. Imagine, agora, que a corrente transmitida seja 1000 A ao invés de 500 A. A potência dissipada na linha seria:

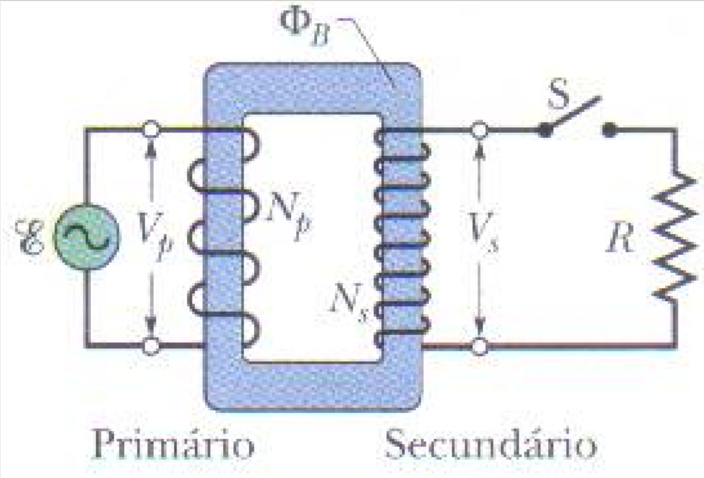
$$P_{méd} = I_{RMS}{}^{2} R = (1000)^{2}(220) = 220\ \mathrm{MW}$$

que representa 60% da potência transmitida. **Desta forma, para minimizar a potência dissipada na linha é necessário minimizar a corrente I_{RMS} e maximizar a tensão ξ_{RMS}.**

Como as linhas de transmissão trabalham com tensões elevadas, é necessário reduzir esses valores para o consumo residencial (220 ou 110 V). Para isso, usamos os transformadores, conforme descrito a seguir.

Transformadores

CASO IDEAL



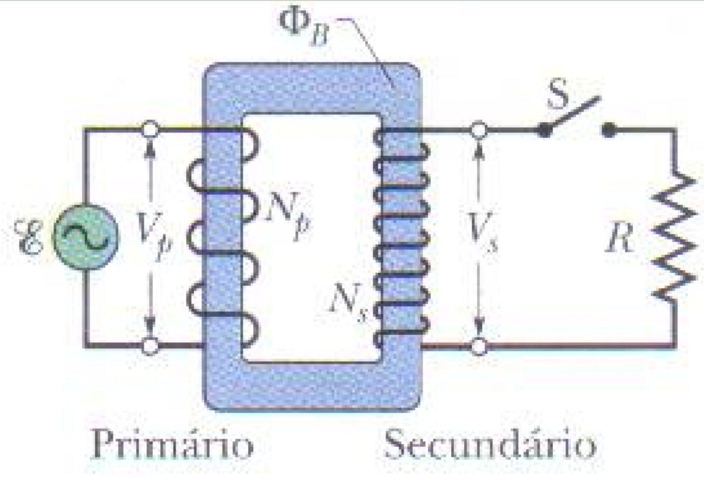
O transformador de indução é formado por um circuito primário e um circuito secundário. O circuito primário é formado por uma fonte primária com tensão alternada de sinal RMS V_P conectada numa carga indutiva com N_p enrolamentos. O circuito secundário é formado por uma outra carga indutiva de N_s enrolamentos conectada em série com um resistor *R* que necessita de alimentação (eletrodoméstico, lâmpada etc.). Existe também uma chave S que pode representar um interruptor "liga-desliga".

Os dois circuitos estão conectados por um núcleo de ferro que aprisiona as linhas de campo magnético da bobina do primário e direciona até a bobina do secundário. A variação da tensão no primário produz um fluxo magnético variável no secundário que produz uma corrente alternada sobre o resistor R quando a chave S está fechada. Logo, temos um transformador de indução. No dispositivo ideal, a potência fornecida pelo primário é igual a potência consumida no secundário:

$$P_p = P_s \quad \therefore \quad V_p I_p = V_s I_s \tag{4}$$

Transformadores

CASO IDEAL



Considerando que o núcleo de ferro captura todas as linhas de campo magnético, a variação de fluxo magnético é a mesma nos dois circuitos:

$$\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_p = \left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_s \quad \therefore \quad \frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s}$$

o que permite escrever: $\boxed{V_s = \left(\frac{N_s}{N_p}\right) V_p}$ (5)

A equação (5) permite calcular a tensão no circuito secundário e ela combinada com a equação (4) permite calcular a corrente no secundário:

$$\boxed{I_s = \left(\frac{V_p}{V_s}\right) I_p = \left(\frac{N_p}{N_s}\right) I_p} \qquad (6)$$

Resolução de problemas

LISTA 11, PROBLEMA 7 – Itens (a), (b) e (c)

O cálculo é direto:

$$V_s = \left(\frac{10}{500}\right)120 = 2,4\ \mathrm{V}$$

e esse transformador é conhecido como "abaixador de tensão". O contrário seria "aumentador de tensão". A corrente no primário pode ser calculado substituindo as equações (5) e (6) na lei de Ohm aplicada no secundário:

$$I_s = \frac{V_s}{R} = \left(\frac{N_s}{N_p}\right)\frac{V_p}{R} = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)I_p \quad \therefore \quad I_p = \left(\frac{N_s}{N_p}\right)^2 \frac{V_p}{R}$$

$$I_p = \left(\frac{10}{500}\right)^2 \frac{120}{15} = 3,2\ \mathrm{mA}$$

A corrente no secundário é dada pela equação (6):

$$I_s = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)I_p = \left(\frac{500}{10}\right)0,0032 = 0,16\ \mathrm{A}$$

Dúvidas?

diego.duarte@ufsc.br

Skype: diego_a_d

Encontrou algum erro nesta aula? Me informe via e-mail ;)