Física 3 (EMB5043): Equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas

MATERIAL DE APOIO PARA CURSO PRESENCIAL

Prof. Diego Alexandre Duarte
Universidade Federal de Santa Catarina | Centro Tecnológico de Joinville

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

Sumário

- Lei de Gauss
  - Campos elétricos
  - Campos magnéticos
- Lei de Faraday
- Lei de Ampère
  - Corrente de deslocamento
- Equações de Maxwell
- A equação da onda
  - Cálculo da velocidade da luz
- Ondas eletromagnéticas
  - Natureza
  - Produção
  - Oscilador de Hertz

Material para estudos

- Capítulo 32 do Halliday volume 3 e capítulo 12 do Moysés volume 3.
- Estudar os problemas da Lista 11 que está disponível em diegoduarte.paginas.ufsc.br.

Lei de Gauss

CAMPOS ELÉTRICOS

A lei de Gauss no formato integral para campos elétricos é dada por:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

que podemos reescrever no formato diferencial com auxílio do teorema da divergência:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) dV \quad \therefore \quad \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) dV = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

em que q pode ser escrito em função da densidade de carga confinada dentro da superfície gaussiana fechada que delimita o volume dV:

$$\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

indicando que a divergência do campo fornece a intensidade de alguma grandeza relacionada com a produção deste campo, *i.e.*, mede a magnitude da fonte:

Lei de Gauss

CAMPOS ELÉTRICOS

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Lei de Gauss

CAMPOS MAGNÉTICOS

A lei de Gauss no formato integral para campos elétricos é dada por:

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0}$$

O fluxo líquido é zero (não existem monopolos magnéticos)

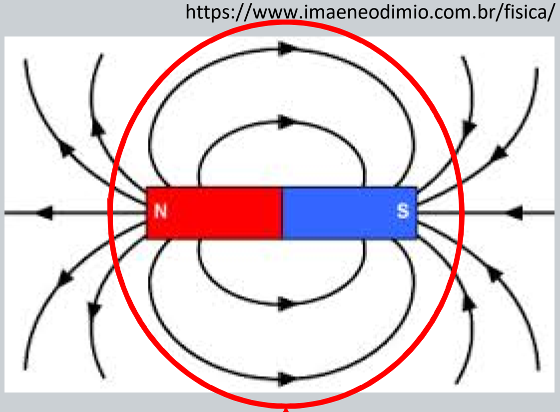
que podemos reescrever no formato diferencial com auxílio do teorema da divergência:

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) dV \quad \therefore \quad \int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) dV = 0$$

https://www.imaeneodimio.com.br/fisica/

gerando:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$$



Superfície fechada

Lei de Faraday

A lei de Faraday no formato integral é dada por:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

que podemos reescrever no formato diferencial com auxílio do teorema do rotacional:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot d\vec{A} \quad \therefore \quad \int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

que permite ser escrito como:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Lei de Ampère

A lei de Ampère no formato integral é dada por:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

que podemos reescrever no formato diferencial com auxílio do teorema do rotacional:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{A} \quad \therefore \quad \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{A} = \mu_0 i$$

em que i pode ser escrito em função da densidade de corrente $\boldsymbol{J}$:

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

indicando que o rotacional do campo magnético representa a densidade de corrente que atravessa a área delimitada pela curva fechada C.

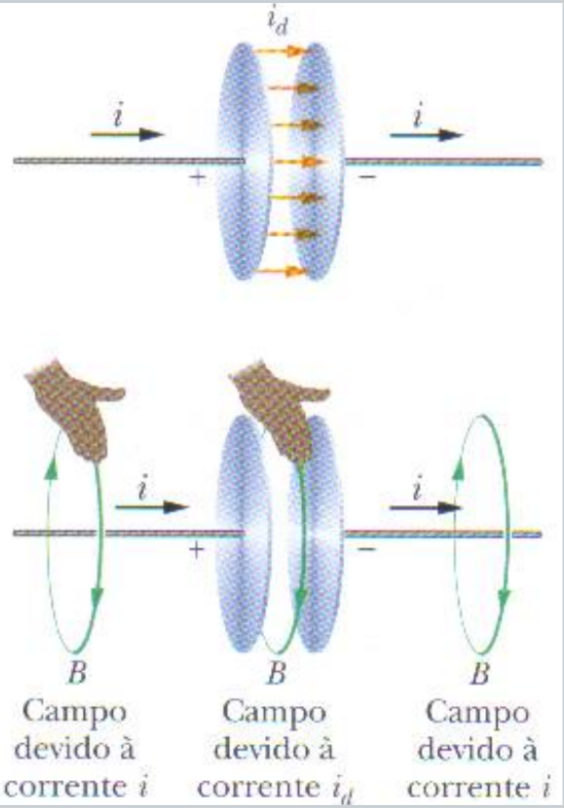
Lei de Ampère

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

Lei de Ampère

CORRENTE DE DESLOCAMENTO



Durante o carregamento de um capacitor com vácuo entre as placas é observado que existe um campo magnético circular, assim como o produzido em torno da fiação externa. Porém, entre as placas não existe corrente elétrica; desta forma, como é possível explicar a produção de um campo circular por meio da lei de Ampère? **A reposta é: o modelo está incompleto e precisa ser corrigido.**

A carga acumulada nas placas é:

$$q = CV = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V = \varepsilon_0 AE$$

o que permite escrever que a variação de fluxo elétrico entre as placas produz uma corrente fictícia i_d:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = i = \varepsilon_0 \frac{\partial (AE)}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$$

Lei de Ampère

CORRENTE DE DESLOCAMENTO

chamada de corrente de deslocamento. Assim, a lei de Ampère entre as placas fica escrita como:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_d = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}$$

No caso geral fica escrita como (equação conhecida como lei de Ampère-Maxwell):

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t}}$$

Para obter o formato diferencial da lei de Ampère-Maxwell, aplicamos o teorema do rotacional:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Equações de Maxwell

As quatro equações que estudamos formam as equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ Lei de Gauss para campos elétricos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ Lei de Gauss para campos magnéticos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ Lei de Ampère-Maxwell

A equação da onda

CÁLCULO DA VELOCIDADE DA LUZ

Analisando as equações no vácuo, não temos a presença de cargas elétricas nem a presença de corrente de condução. Desta forma, as equações são reduzidas para:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$	Lei de Gauss para campos elétricos
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Lei de Gauss para campos magnéticos
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Lei de Faraday
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Lei de Ampère-Maxwell

Por simplicidade, consideraremos que os campos se propagam ao longo da direção z:

$$\vec{E} = \vec{E}(z,t) \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{B}(z,t)$$

A equação da onda

CÁLCULO DA VELOCIDADE DA LUZ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}}_{=0}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

$$\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\frac{\partial E_x}{\partial z}\,\hat{y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\,\hat{x}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\,\hat{x}-\frac{\partial B_y}{\partial t}\,\hat{y}-\frac{\partial B_z}{\partial t}\,\hat{z}$$

$$\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\frac{\partial B_x}{\partial z}\,\hat{y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\,\hat{x}=\mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\,\hat{x}+\frac{\partial E_y}{\partial t}\,\hat{y}+\frac{\partial E_z}{\partial t}\,\hat{z}\right)$$

A equação da onda
CÁLCULO DA VELOCIDADE DA LUZ

$$\text{(i)} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{(iii)} \quad -\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat{x} - \frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{y} - \frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{z}$$

$$\text{(iv)} \quad -\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{y} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{y} + \frac{\partial E_z}{\partial t}\hat{z} \right)$$

As equações acima mostram que:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 = \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

A equação da onda

CÁLCULO DA VELOCIDADE DA LUZ

o que fornece:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{x}+\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}\hat{x}-\frac{\partial B_y}{\partial t}\hat{y}$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x}+\frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{y}=\mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{x}+\frac{\partial E_y}{\partial t}\hat{y}\right)$$

e permite escrever os dois sistemas de equações:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial z}&=\frac{\partial B_x}{\partial t}\\ \frac{\partial B_x}{\partial z}&=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\end{aligned}}\qquad\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial z}&=-\frac{\partial B_y}{\partial t}\\ \frac{\partial B_y}{\partial z}&=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\end{aligned}}$$

A equação da onda

CÁLCULO DA VELOCIDADE DA LUZ

Tomando a derivada no primeiro par de equações em relação ao tempo *t* e a coordenada *z*, obtemos:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial z} &= \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial t}\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial t}\\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial t \partial z} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\end{aligned}}$$

As derivadas mistas são simétricas. Isso significa que:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial t}$$

Logo, obtemos as equações:

A equação da onda

CÁLCULO DA VELOCIDADE DA LUZ

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0}$$

O resultado acima mostra que existem duas ondas transversais se propagando na mesma direção e com velocidade bem definida. Comparando as equações acima com a equação da onda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

em que *f* se comporta como uma onda de velocidade *v* que se propaga na direção *x*, obtemos:

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0\varepsilon_0 \quad \therefore \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(8{,}8542\times10^{-12}\right)}} = 2{,}99792\times10^{8}\ \text{m/s}$$

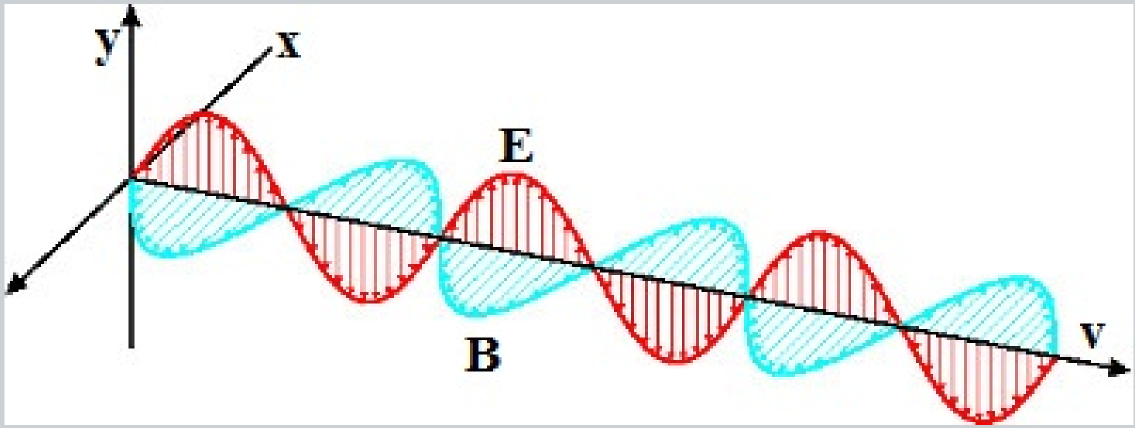
que é a velocidade da luz no vácuo. Desta forma, concluímos que a luz é formada por campos elétricos e magnéticos cruzados, o que origina o nome “onda eletromagnética”.

Ondas eletromagnéticas

NATUREZA

A onda eletromagnética é um fenômeno auto sustentado, pois a variação do campo elétrico cria o campo magnético e a variação do campo magnético cria o campo elétrico.

Na figura abaixo, o campo magnético ***B*** oscila no eixo x e o campo elétrico ***E*** oscila no eixo y, com ambos se propagando pelo eixo z com velocidade v, conforme demonstramos.

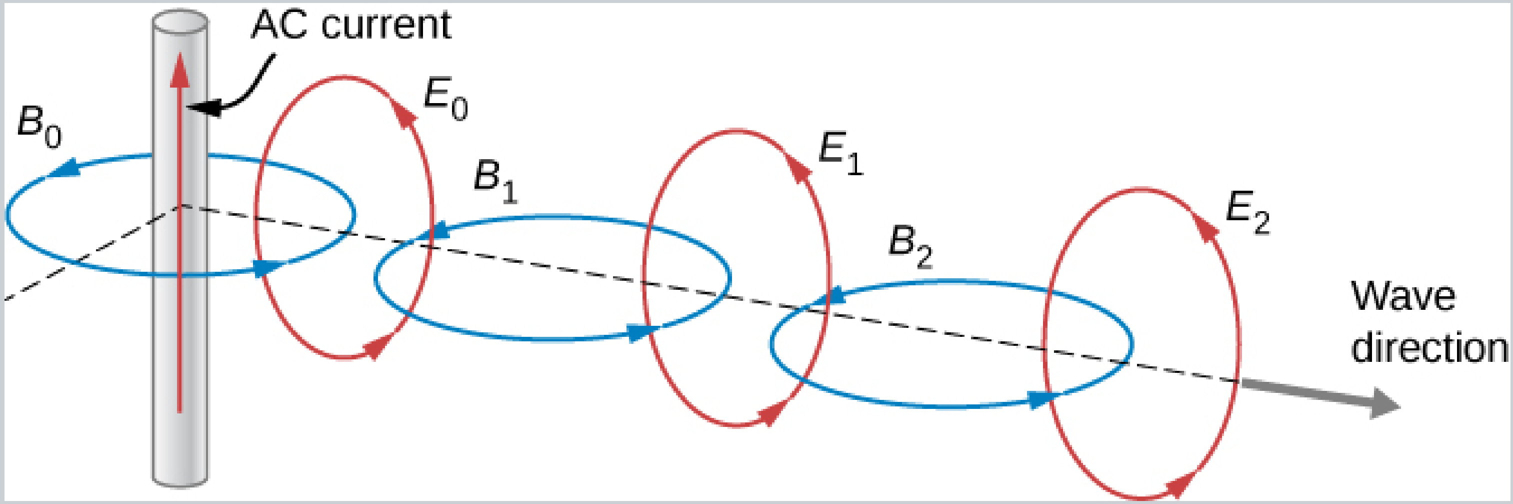


https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/o-que-sao-ondas-eletromagneticas.htm

Ondas eletromagnéticas

PRODUÇÃO

A produção de ondas eletromagnéticas pode ser realizada por meio de uma corrente elétrica oscilando no tempo. O campo magnético circular produz um campo elétrico oscilante que produz outro campo magnético oscilante e assim por diante. Logo, cargas elétricas aceleradas produzem ondas eletromagnéticas!

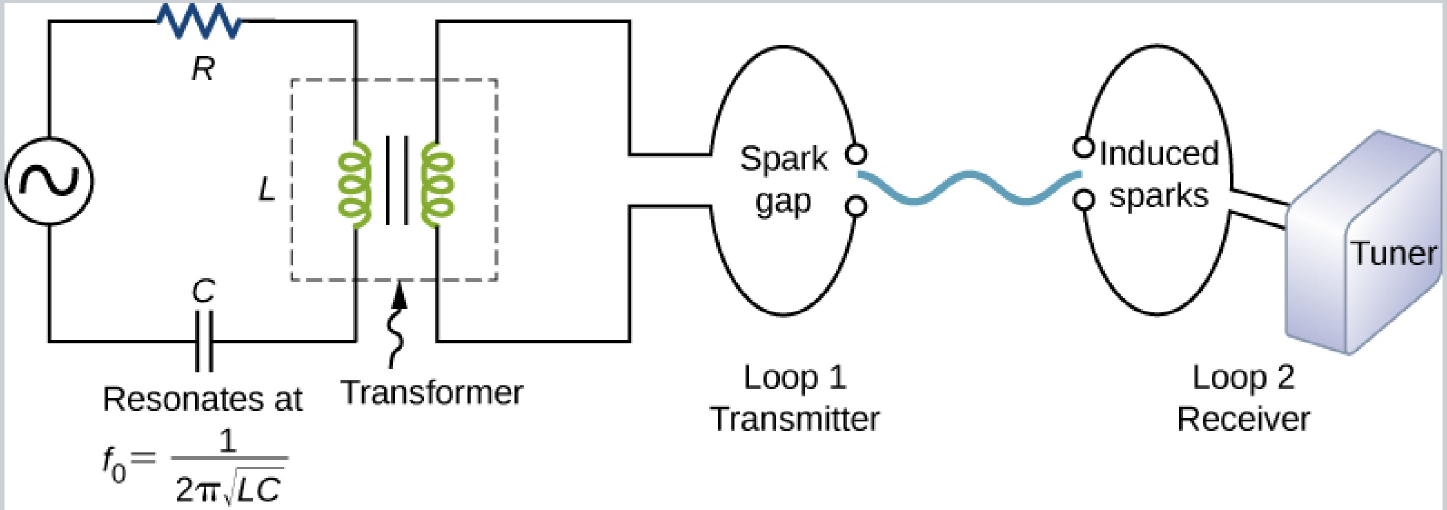


https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Map%3A_University_Physics_II_-_Thermodynamics_Electricity_and_Magnetism_(OpenStax)/16%3A_Electromagnetic_Waves/16.02%3A_Maxwell%E2%80%99s_Equations_and_Electromagnetic_Waves

Ondas eletromagnéticas

OSCILADOR DE HERTZ

Um transformador é formado por um circuito primário RLC operando na frequência de ressonância e um circuito secundário RL. Uma corrente alternada é produzida no circuito primário que produz um arco e uma onda eletromagnética no gap. A onda emitida produz um corrente elétrica num circuito próximo. Aqui, temos a produção de uma antena!



https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Map%3A_University_Physics_II_-_Thermodynamics_Electricity_and_Magnetism_(OpenStax)/16%3A_Electromagnetic_Waves/16.02%3A_Maxwell%E2%80%99s_Equations_and_Electromagnetic_Waves

Heinrich Hertz
(1857-1894)

https://pt.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz

Dúvidas?

diego.duarte@ufsc.br

Skype: diego_a_d

Encontrou algum erro nesta aula? Me informe via e-mail ;)

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA