Física 3 (EMB5043): Indução magnética e circuitos

MATERIAL DE APOIO PARA CURSO PRESENCIAL

Prof. Diego Alexandre Duarte
Universidade Federal de Santa Catarina | Centro Tecnológico de Joinville

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

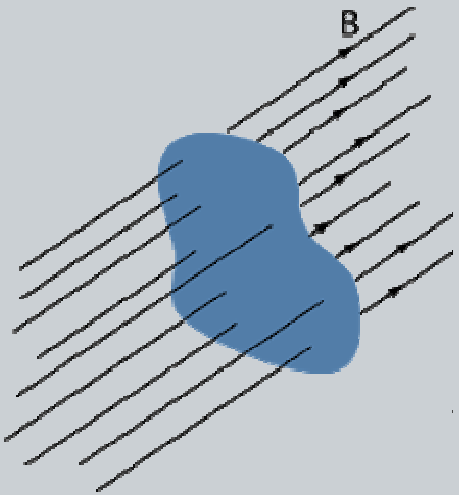
Sumário

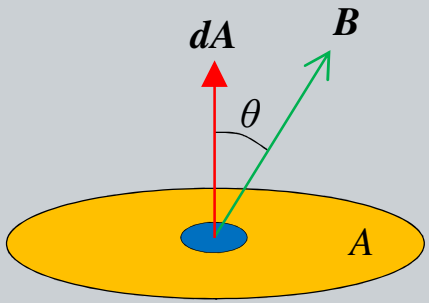
- Fluxo magnético
- Lei de Faraday
- Lei de Lenz
- Transferência de energia
- Campo elétrico induzido
- Indutores e indutância
- Autoindução
- Circuito RL
- Energia em indutores
- Indução mútua
- Resolução de problemas da Lista 10

Material para estudos

- Capítulo 30 do Halliday volume 3 e capítulo 9 do Moysés volume 3.
- Estudar os problemas da Lista 10 que está disponível em diegoduarte.paginas.ufsc.br.

Fluxo magnético





Considere um campo magnético B atravessando uma superfície de área A. Considerando que as linhas de campo magnético formam um ângulo θ com a superfície, o fluxo magnético Φ é dado por:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

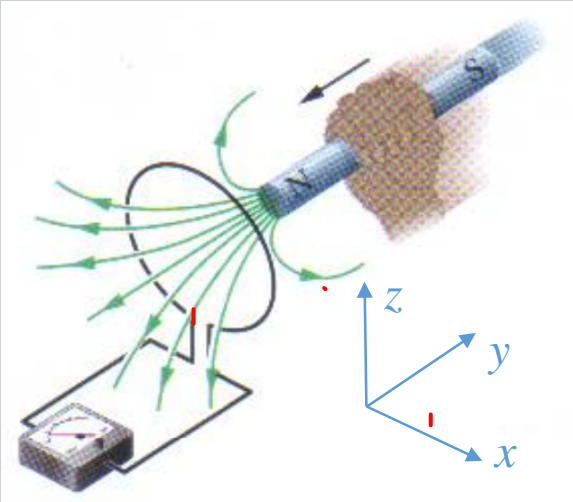
que é dado em $T \cdot m^2$ ou weber (Wb). Assim como em fluxo elétrico, temos:

$$\Phi > 0 \quad \text{se} \quad 0 \leq \theta < 90^\circ$$

$$\Phi < 0 \quad \text{se} \quad 90^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

$$\Phi = 0 \quad \text{se} \quad \theta = 90^\circ$$

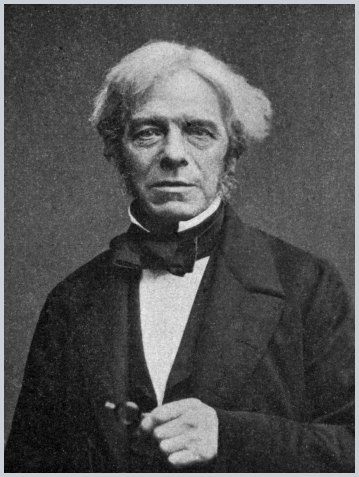
Lei de Faraday

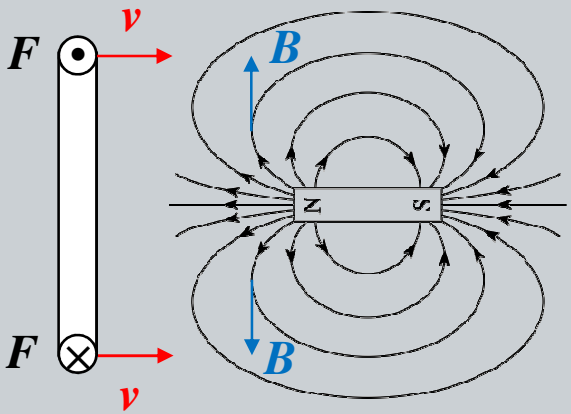


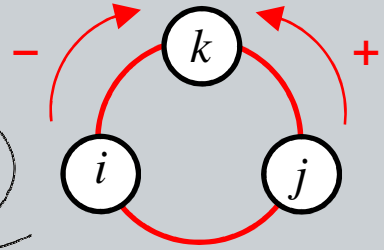
A partir de 1831, Michael Faraday realiza experimentos que indicam a produção de corrente elétrica pela variação de fluxo magnético em bobinas. A força eletromotriz (fem) na bobina é dada por:

$$\xi = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (1)$$

em que N é o número de enrolamentos e Φ_B o fluxo magnético.





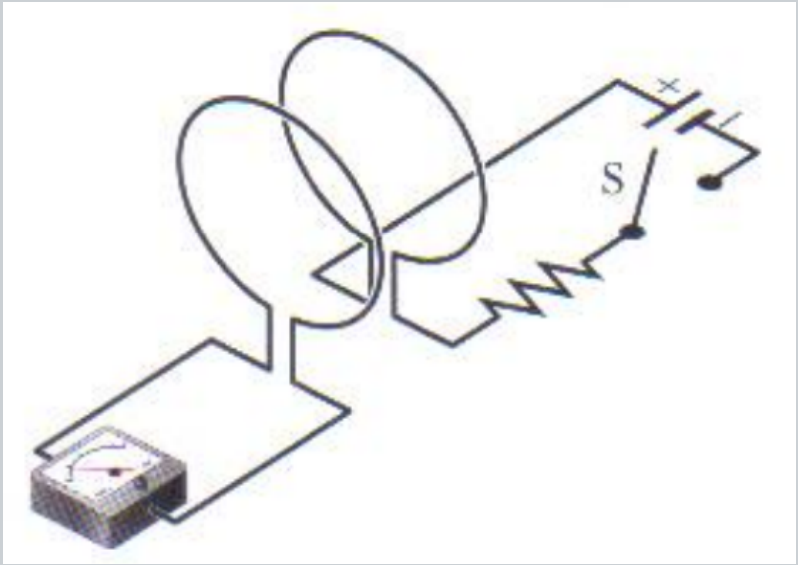


$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- Quanto mais rápido o movimento do imã, maior é a fem induzida;
- O sentido da fem muda de acordo com a polaridade em aproximação.

Lei de Faraday

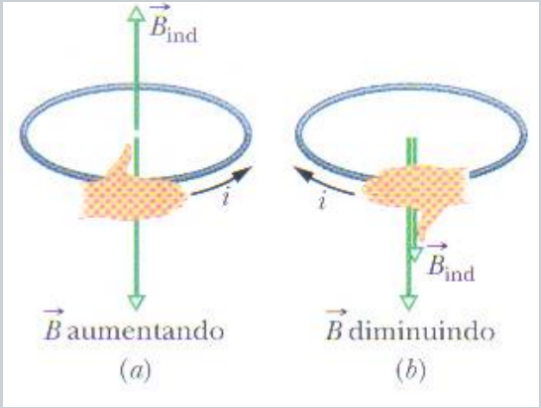
A equação (1) também é válida ao variarmos a intensidade do campo magnético com os componentes do circuito em repouso:

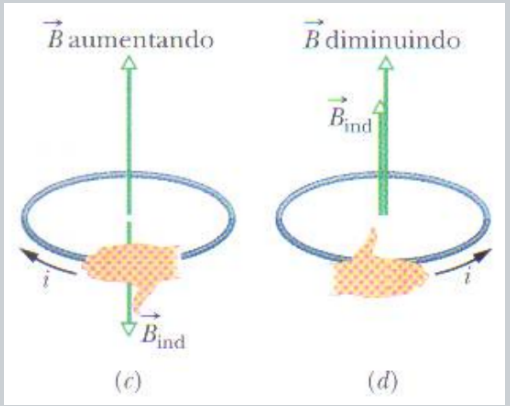


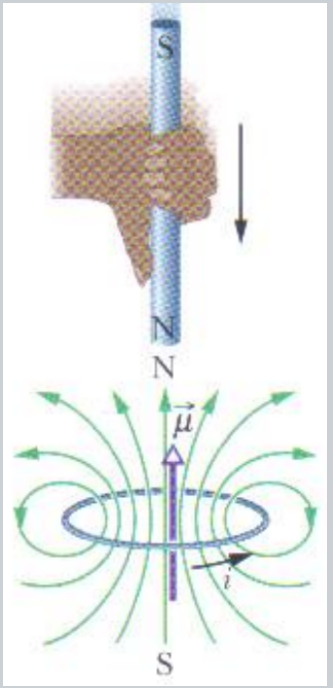
Lei de Lenz

Heinrich Friedrich Emil Lenz propõe logo após Faraday a lei que dá interpretação para o sinal negativo da lei de Faraday:

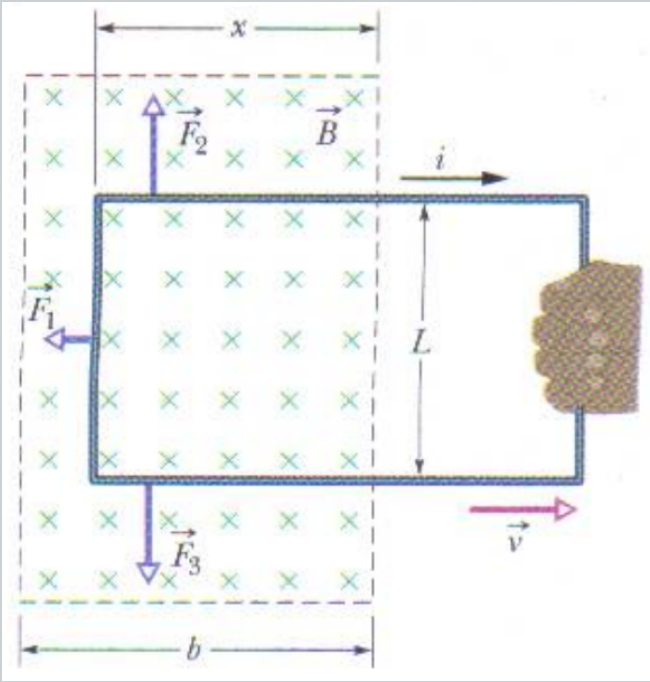
"*A corrente induzida em uma espira tem um sentido tal que o fluxo magnético produzido pela corrente se opõe a variação do fluxo magnético externo.*"







Transferência de energia



Considere uma espira de largura L imersa numa região de campo magnético uniforme $\boldsymbol{B}$ perpendicular ao plano. A espira é deslocada bruscamente para direita com velocidade $\boldsymbol{v}$. Com isso, o fluxo magnético é reduzido, gerando uma fem induzida:

$$\Phi = BLx \quad \therefore \quad \xi = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(BLx\right)}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = -BLv$$

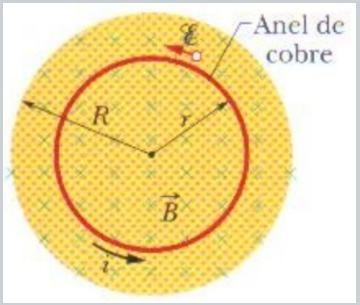
onde o sinal negativo indica que o fluxo induzido se opõe ao fluxo do campo magnético externo. Considerando que a espira possui uma resistência elétrica R, podemos escrever a fem como pela lei de Ohm:

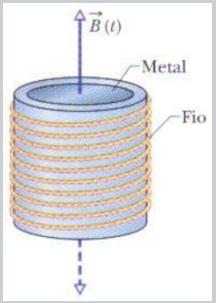
$$Ri = BLv \quad \therefore \quad i = \frac{BLv}{R}$$

Como existe corrente elétrica pelo circuito, haverá dissipação de energia por efeito Joule. Para obter a potência dissipada, considere:

$$P = i^2 R = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

Campo elétrico induzido



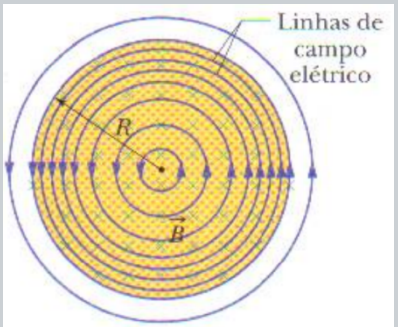


Considere uma casca cilíndrica de raio *r* imersa uma região com campo magnético uniforme ***B*** produzido por um solenóide. Ao variar o fluxo magnético, surge uma fem circular induzida que produzirá uma corrente elétrica induzida. Essa fem surge porque existe um campo elétrico induzido:

$$\xi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (2)$$

Combinando a equação (2) com a equação (1) obtemos a expressão geral para a lei de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (3)$$



A equação (3) mostra que a variação de fluxo magnético produz campo elétrico em um meio material ou em **vácuo**. Essa é uma das condições de contorno necessárias para o estudo de ondas eletromagnéticas.

Campo elétrico induzido

O campo elétrico induzido é **não conservativo**:

$$\xi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

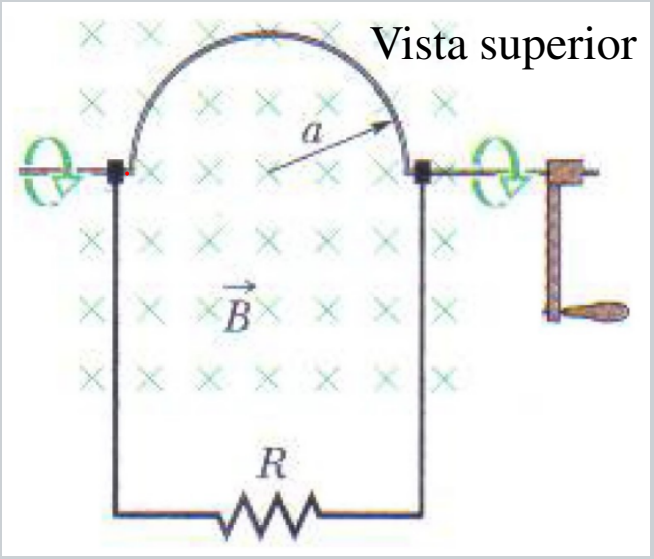
o que é diferente dos campos elétricos que estudamos até o momento:

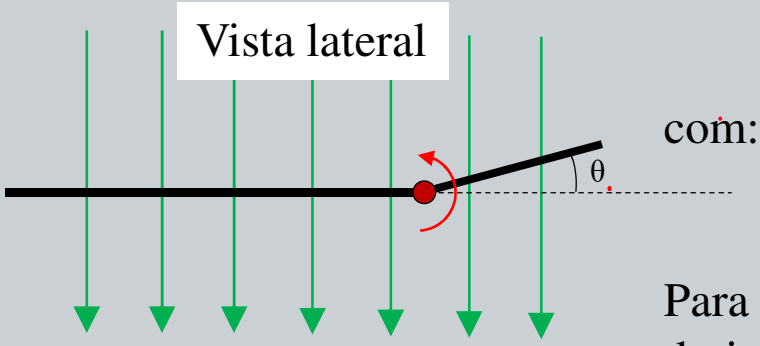
$$\Delta V = -\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Os campos elétricos que estudamos são provocados por cargas elétricas e possuem geometria aberta, ao passo que campos elétricos induzidos formam linhas fechadas e como campos induzidos não são conservativos, não podemos atribuir o conceito de potencial elétrico; apenas o conceito de força eletromotriz.

Resolução de problemas

LISTA 10, PROBLEMA 1 – Item (a)





Para determinar a frequência a amplitude da fem, devemos calcular o fluxo magnético através da área da espira:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = BA = B\left(A_0 + \frac{\pi a^2}{2}\cos\theta\right)$$

em que A_0 representa a área estática. O ângulo θ é dinâmico e dado por $\theta = \omega t$:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = BA = B\left[A_0 + \frac{\pi a^2}{2}\cos(\omega t)\right]$$

com:

$$\omega = 2\pi f \quad \therefore \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 40\,\text{Hz}$$

Para obter a fem induzida, devemos obter a primeira derivada de Φ_B:

Resolução de problemas

LISTA 10, PROBLEMA 1 – Item (b)

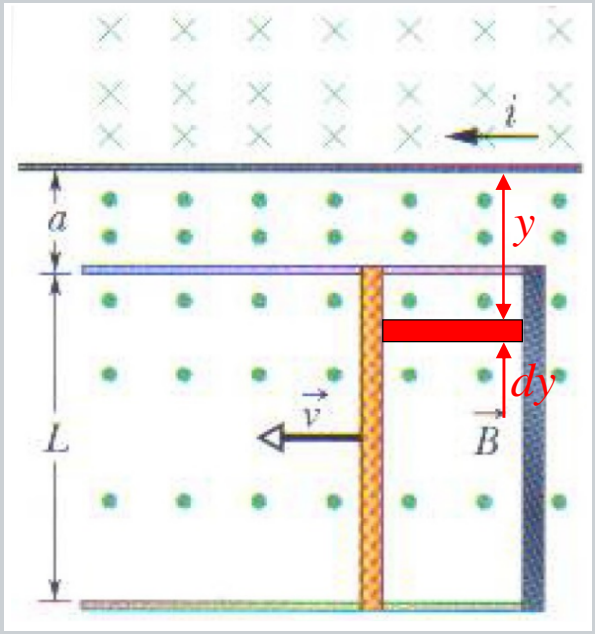
$$\xi = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left\{B\left[A_0 + \frac{\pi a^2}{2}\cos(\omega t)\right]\right\} = \frac{B\pi a^2 \omega}{2}\sin(\omega t)$$

A amplitude da fem induzida é o termo que multiplica a função seno:

$$A = \frac{B\pi a^2 \omega}{2} = B(\pi a)^2 f = (0{,}020)(\pi \times 0{,}020)^2 (40) = 3{,}2 \text{ mV}$$

Resolução de problemas

LISTA 10, PROBLEMA 4 – Item (a)



O fluxo magnético é dado por:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B dA = \int \frac{\mu_0 i}{2\pi y} x dy = \frac{\mu_0 i x}{2\pi}\int \frac{dy}{y}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i x}{2\pi}\int_a^{a+L} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 i x}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

e o módulo da fem induzida será:

$$\xi = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 i x}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right] = \frac{\mu_0 i v}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

Substituindo os valores do enunciado, obtemos:

$$\xi = \frac{\mu_0 i v}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right) = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\right)(100)(5{,}00)}{2\pi}\ln\left(\frac{0{,}01+0{,}10}{0{,}01}\right) = 240\ \mu\text{V}$$

Sentido horário

Resolução de problemas

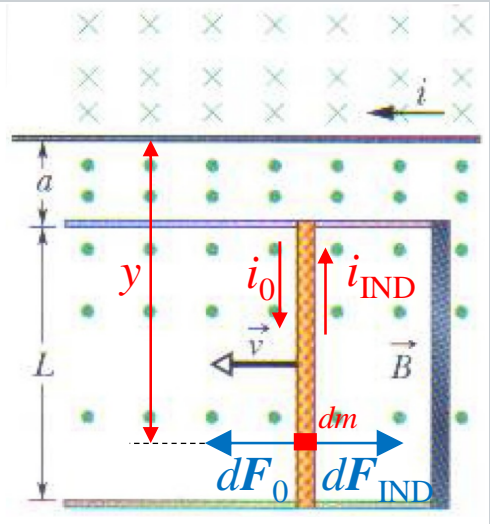
LISTA 10, PROBLEMA 4 – Item (b)-(d)

A corrente elétrica que atravessa a barra metálica é dada por:

$$\xi = Ri \quad \therefore \quad i = \frac{\xi}{R} = \frac{240}{0,400} = 600\ \mu\text{A} = 0,600\ \text{mA}$$

A potência dissipada é:

$$P = (0,400)\left(0,600\times10^{-3}\right)^2 = 0,144\ \mu\text{W}$$



Para que a barra se mova com velocidade constante, a soma das forças que atuam sobre ela deve ser zero. Isso indica que existe a força magnética causada pela corrente induzida calculada no item (b) e outra força F_0 de origem desconhecida. Vamos atribuir, arbitrariamente, essa força a uma corrente i_0 que pode ser devido a um circuito ligado numa fonte omitida. Logo:

$$dm\frac{dv}{dt} = dF_0 - dF_{IND}$$

Resolução de problemas

LISTA 10, PROBLEMA 4 – Item (d) e (e)

Quando a aceleração é zero (v constante), obtemos:

$$dF_0 = dF_{IND} = i_{IND}\,dy\,B(y) = i_{IND}\,dy\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi y}\right)$$

$$F_0 = F_{IND} = i_{IND}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi}\right)\int_a^{a+L}\frac{dy}{y} = \left(\frac{\mu_0 i_{IND} i}{2\pi}\right)\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$F_0 = F_{IND} = \left(\frac{\mu_0 i_{IND} i}{2\pi}\right)\ln\left(\frac{a+L}{a}\right) = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\right)\left(0{,}600\times10^{-3}\right)(100)}{2\pi}\ln\left(\frac{0{,}01+0{,}10}{0{,}01}\right) = 28{,}7\ \text{nN}$$

A taxa de realização de trabalho é a potência desta força:

$$P = F_{IND}v = \left(28{,}7\times10^{-9}\right)(5{,}00) = 0{,}144\ \mu\text{W}$$

A potência transmitida pela força é integralmente consumida pelo circuito.

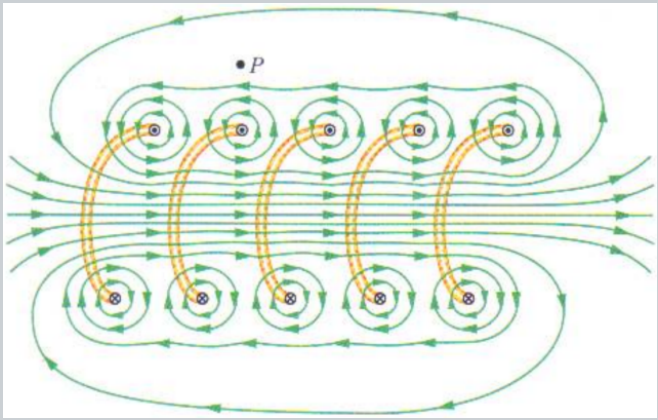
Indutores e indutância

Considere um solenóide com corrente i que produz um fluxo magnético em seu interior. O fluxo produzido por unidade de corrente é chamado de indutância L:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

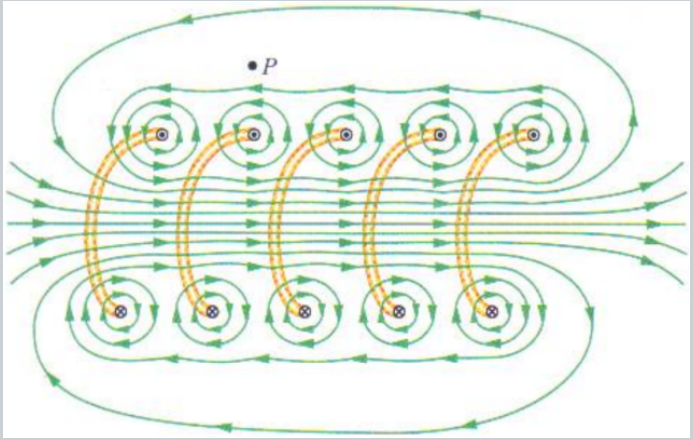
em que N é o número de enrolamentos do solenóide. A indutância de um indutor é dada em henry (H):

$$1\ \text{H} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2/\text{A}$$



Indutores e indutância

INDUTÂNCIA DE UM SOLENÓIDE



Um solenóide de área A, comprimento L e N espiras é percorrido por uma corrente elétrica i:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA = (\mu_0 \eta i) A$$

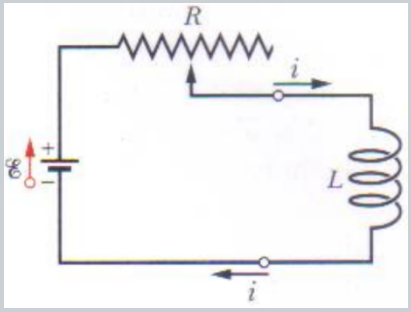
em que $\eta = N/l$ é a densidade de espiras. Com o resultado, obtemos a indutância por unidade de comprimento do solenóide:

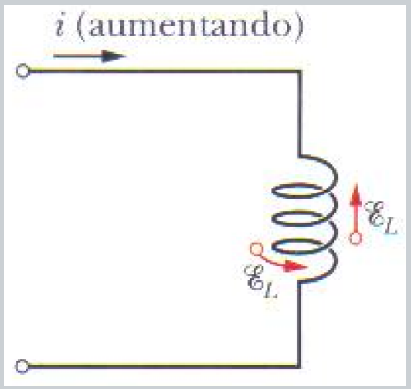
$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{N(\mu_0 \eta i)A}{i} = (\eta l)(\mu_0 \eta) A = \mu_0 \eta^2 A l$$

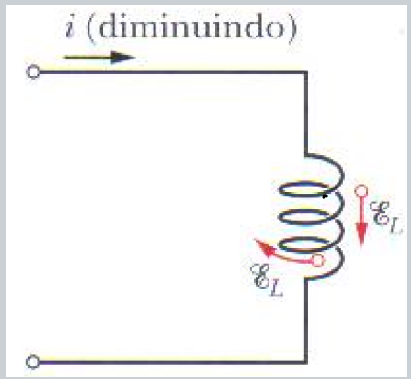
$$\frac{L}{l} = \mu_0 \eta^2 A$$

A indutância depende apenas de propriedades geométricas do indutor.

Auto-indução







Considere um indutor de indutância L conectado em série com uma fonte de tensão com fem ξ e um resistor de resistência R. O circuito possui corrente i. Quando a fonte é ligada ou desligada ou a fem é aumentada ou reduzida, produzimos um fluxo variável pelo indutor. De acordo com a lei de Faraday, haverá a produção de uma fem induzida ξ_L no indutor que produzirá um fluxo em oposição ao fluxo produzido dentro do solenóide:

`

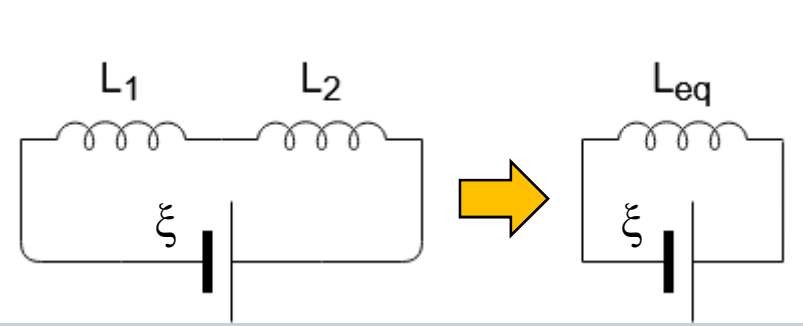
$$\xi_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\overbrace{\left(N\Phi_B\right)}^{L=\frac{N\Phi_B}{i}}}{dt} = -\frac{d\left(Li\right)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

A fem induzida vai gerar uma corrente induzida i_{ind} que:

- tem mesmo sentido da corrente da fonte, caso i seja reduzida
- tem o sentido oposto da corrente da fonte, caso i seja aumentada.

Indutores e indutância

INDUTORES EM SÉRIE



Considere os indutores L_1 e L_2 em série, conforme a figura ao lado. Aplicando a lei da malhas, temos:

$$\xi - L_1 \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} = 0$$

que pode ser escrito como:

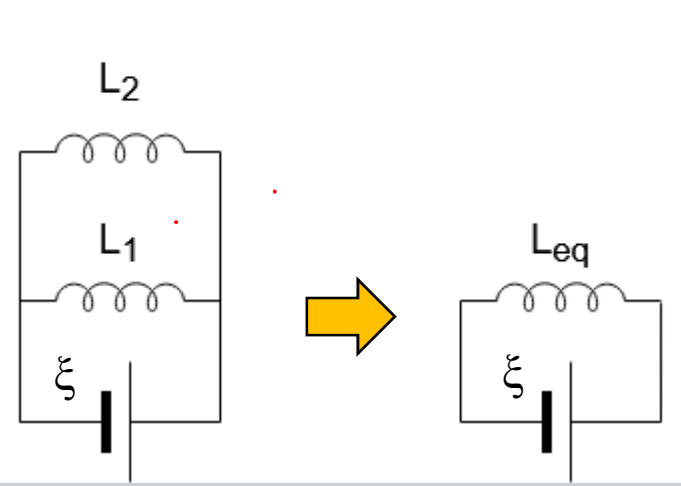
$$\xi = \left(L_1 + L_2\right)\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

O termo entre parênteses pode ser escrito como uma indutância equivalente L_{eq}. Desta forma, para um circuito com N indutores em série, a indutância equivalente é dada por:

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

Indutores e indutância

INDUTORES EM PARALELO



Considere os indutores L_1 e L_2 em paralelo, conforme a figura ao lado. Considerando que a corrente i_1 passa pelo indutor L_1 e a corrente i_2 pelo indutor L_2, temos:

$$i = i_1 + i_2 \quad \therefore \quad \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

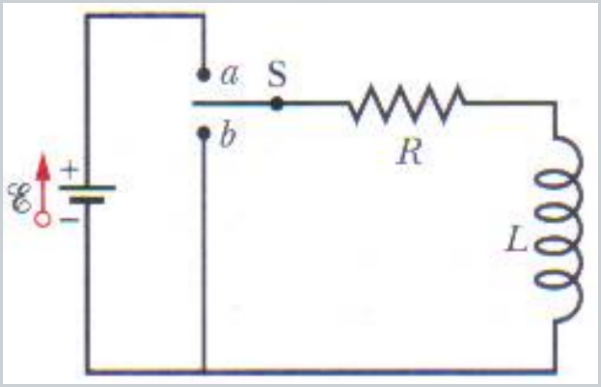
que pode ser reescrito como:

$$-\frac{\xi}{L_{eq}} = -\frac{\xi_1}{L_1} - \frac{\xi_2}{L_2} \quad \therefore \quad \frac{\xi}{L_{eq}} = \frac{\xi_1}{L_1} + \frac{\xi_2}{L_2}$$

em que $\xi_1 = \xi_2 = \xi$. Logo, para um circuito com N indutores em paralelo, L_{eq} é dado por:

$$L_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^{N} L_i^{-1}$$

Circuito RL



Considere um indutor de indutância L conectado em série com um resistor de resistência R e com uma fonte de tensão com fem ξ por meio de uma chave S. Ao conectarmos a chave no terminal a, obtemos a EDO:

$$\xi - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

Que pode ser reescrita como:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\xi}{L}$$

→ ...a solução é análoga do circuito RC: →

$$i(t) = \frac{\xi}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

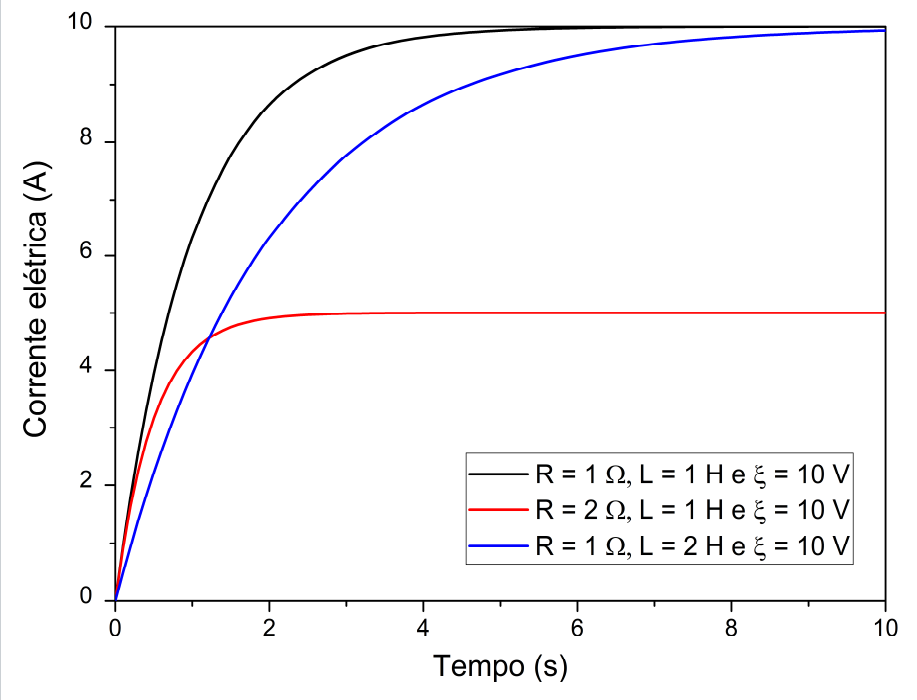
A solução é obtida considerando a condição de contorno:

- A corrente no circuito é **zero** em $t_0 = 0$
- A corrente aumenta até i no instante $t > 0$

Circuito RL

SOLUÇÃO GRÁFICA

A solução $i(t)$ é apresentada abaixo considerando $\xi = 10$ V e diferentes valores para R e L.



$$i(t) = \frac{\xi}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

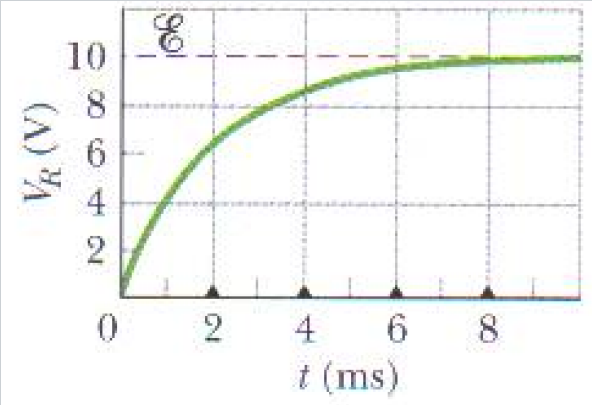
- O termo L/R é chamado de constante de tempo indutiva τ_L e mede o quão rápido a corrente aumenta ou diminui no circuito.

- Quando $t = \tau_L$ a corrente no circuito é 63,2% da corrente total.

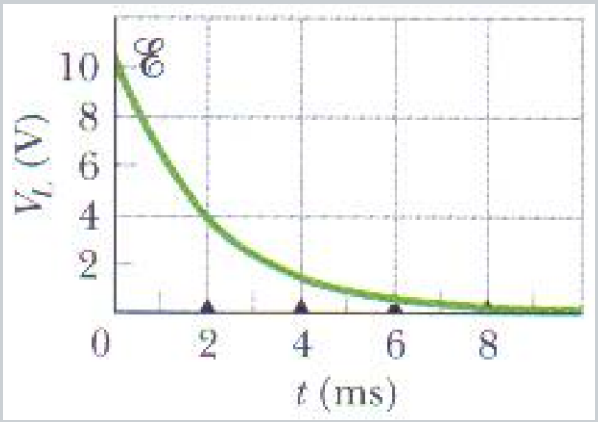
Circuito RL

SOLUÇÃO GRÁFICA

As curvas abaixo foram obtidas com $\xi = 10$ V, $R = 2000\ \Omega$ e $L = 4{,}0$ H.



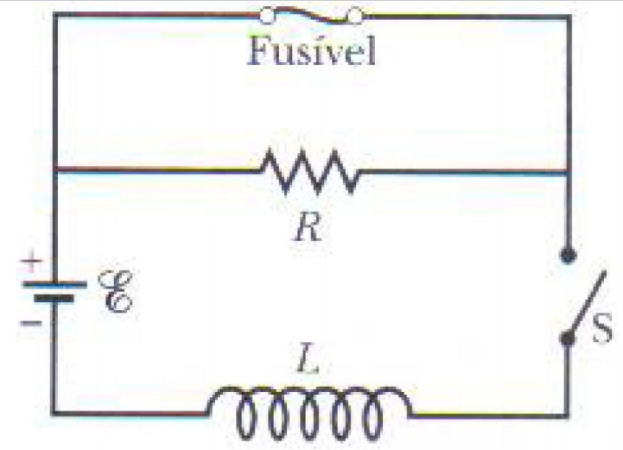
$$V_R(t) = Ri(t) = \xi\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



$$V_L(t) = L\frac{di}{dt} = \xi e^{-\frac{R}{L}t}$$

Resolução de problemas

LISTA 10, PROBLEMA 7 – Itens (a) e (b)



Enquanto o fusível não queima, a corrente passa por ele, pois tem resistência muito menor que R. Assim:

$$\xi - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \therefore \quad i = \frac{\xi}{L}t = \frac{10}{5}t = 2t$$

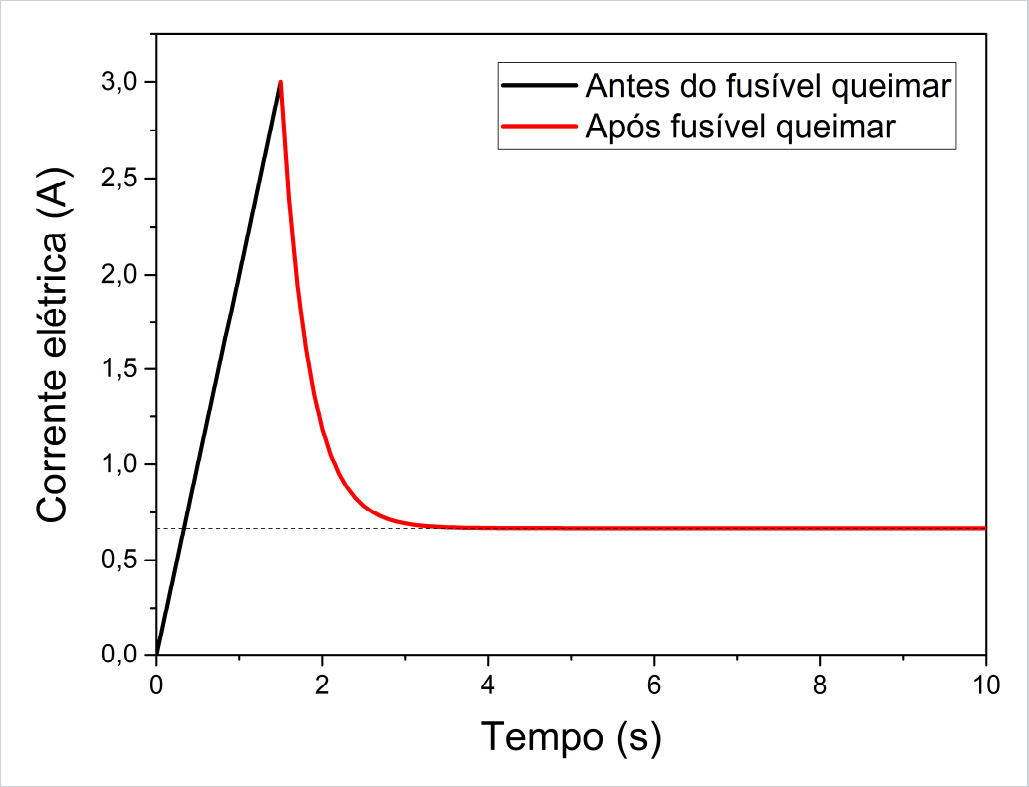
Desta forma, o fusível de 3,0 A queima em 1,5 s após ligar o circuito.

Após a queima do fusível, o circuito sofre uma transição e a corrente passa principalmente pelo resistor R, pois o fusível adquire resistência infinita. Logo, teremos um circuito RL. Para obter a evolução da corrente no tempo, resolvemos a lei das malhas:

$$\xi - Ri - L\frac{di}{dt} = 0 \quad \therefore \quad \int_{3,0}^{i} \frac{di}{\left(i - \frac{\xi}{R}\right)} = -\frac{R}{L}\int_{1,5}^{t} dt \quad \therefore \quad i(t) = \frac{\xi}{R} + \left(3,0 - \frac{\xi}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}(t-1,5)}$$

Resolução de problemas

LISTA 10, PROBLEMA 7 – Itens (b)

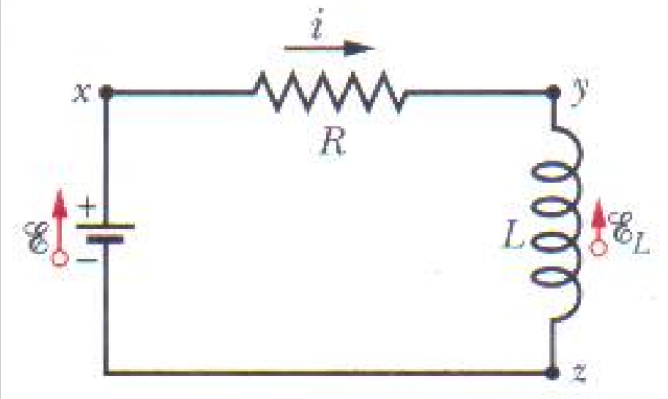


$$i(0) = 0$$

$$i(t = 1{,}5) = 3{,}0 \text{ A}$$

$$i(t \to \infty) = 0{,}666 \text{ A}$$

Energia em indutores



Considere um indutor de indutância L conectado em série com uma fonte de tensão com fem ξ e um resistor de resistência R. O circuito possui corrente i. A EDO que descreve este circuito é:

$$\xi - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

Podemos reescrever a EDO para identificarmos quem transfere e absorve potência:

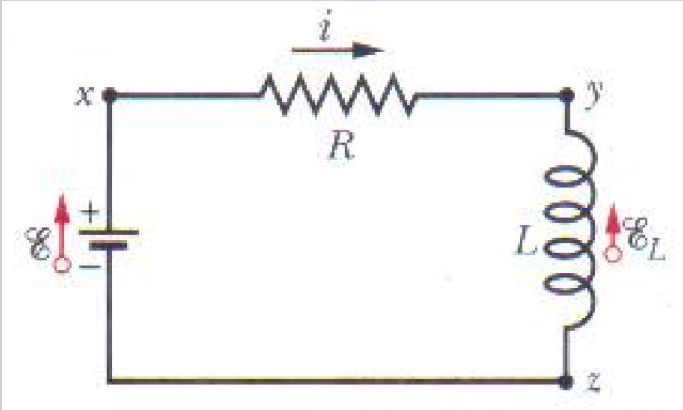
$$\xi i - Ri^2 - L\frac{di}{dt}i = 0$$

Potência fornecida pela fonte

Potência dissipada no resistor

Potência absorvida no indutor

Energia em indutores



A potência absorvida pelo indutor é:

$$P = \frac{dU_L}{dt} = L\frac{di}{dt}i$$

o que permite obter a energia armazenada no dispositivo:

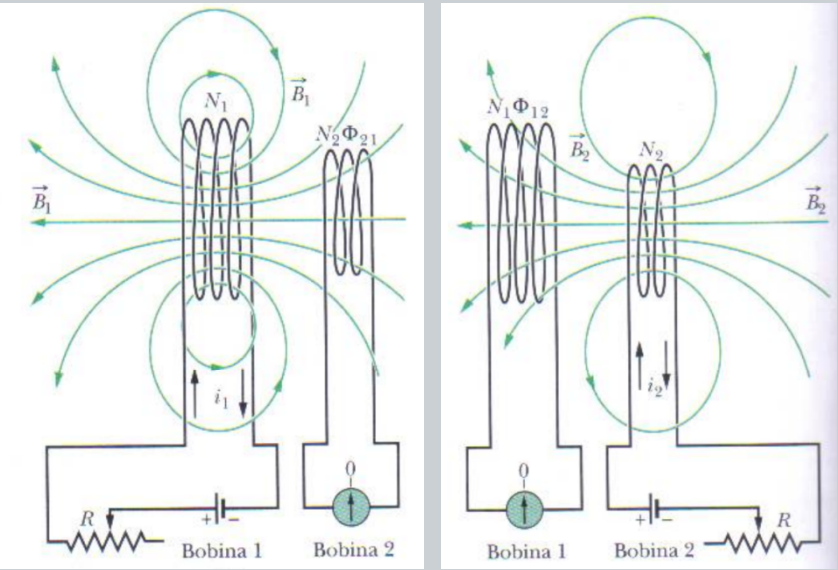
$$dU_L = Lidi \quad \therefore \quad U_L = L\int_0^i idi = \frac{1}{2}Li^2$$

Considerando que o indutor possui área A e comprimento l, a densidade de energia u_L é:

$$u_L = \frac{U_L}{Al} = \frac{Li^2}{2(Al)} = \frac{(\mu_0\eta^2 Al)}{2(Al)}\left(\frac{B}{\mu_0\eta}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\boxed{u_L = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Indução mútua



Considere dois circuitos iguais, onde cada um é formado por dois solenóides, com um ligado em uma fonte com fem constante e outro conectado em um amperímetro.

Na figura da esquerda, a bobina 1 possui corrente elétrica i_1 e N_1 enrolamentos que produzem um campo magnético $\boldsymbol{B}_1$ e um fluxo magnético sobre a bobina 2 dado por $N_2\Phi_{21}$ em que N_2 é o número de enrolamentos na bobina 2 e Φ_{21} o fluxo em 2 devido 1.

Na figura da direita, a bobina 2 possui corrente elétrica i_2 e N_2 enrolamentos que produzem um campo magnético $\boldsymbol{B}_2$ e um fluxo magnético sobre a bobina 1 dado por $N_1\Phi_{12}$ em que N_1 é o número de enrolamentos na bobina 1 e Φ_{12} o fluxo em 1 devido 2.

Indução mútua

Esse arranjo faz surgir a chamada indutância mútua:

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} \qquad \text{e} \qquad M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2}$$

em que M_{21} é a indutância da bobina 2 devido 1 e M_{12} é a indutância da bobina 1 devido 2. As indutâncias mútuas são iguais; desta forma:

$$M_{21} = M_{12} = M$$

Quando existe variação de corrente nas bobinas, as equações acima mostram que haverá fem induzida:

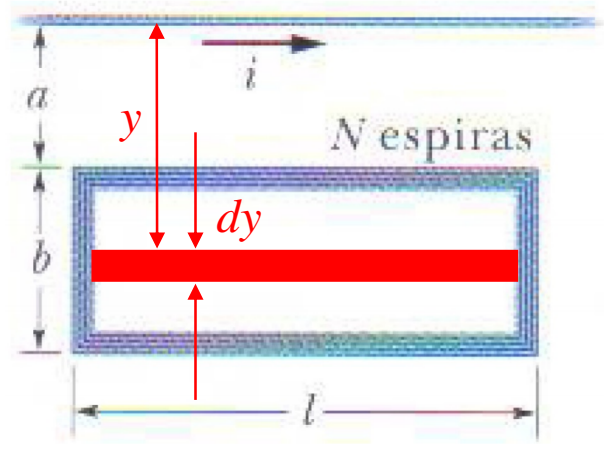
$$\xi_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d\left(N_1 \Phi_{12}\right)}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}$$

$$\xi_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{d\left(N_2 \Phi_{21}\right)}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

sendo um resultado fundamental para a construção de transformadores de indução.

Resolução de problemas

LISTA 10, PROBLEMA 10



O fio infinito produz um campo magnético sobre a espira; desta forma, gera um fluxo magnético. A indutância do enrolamento devido o campo produzido pelo fio é dada por:

$$M = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{N}{i}\int_a^{a+b} BdA = \frac{N}{i}\int_a^{a+b}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi y}\right)ldy$$

$$M = \frac{\mu_0 Nl}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 Nl}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

Substituindo os valores, temos:

$$M = \frac{\mu_0 Nl}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right) = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\right)(100)(0{,}30)}{2\pi}\ln\left(\frac{9{,}0}{1{,}0}\right) = 13{,}2\ \mu\text{H}$$

Dúvidas?

diego.duarte@ufsc.br

Skype: diego_a_d

Encontrou algum erro nesta aula? Me informe via e-mail ;)

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA